

Examen de Statistiques et Mathématiques

L2 AES

16 décembre 2020

Enseignant : Simon ROBY

Le sujet est composé de plusieurs exercices complètement indépendants.

L'exercice 1 demande de calculer une primitive et une intégrale.

L'exercice 2 étudie deux suites.

L'exercice 3 met en situation deux problèmes de probabilités discrètes.

L'exercice 4 vous propose d'étudier les coûts d'un magasin de jouets.

Une attention particulière à la rédaction et au soin sera valorisée par le correcteur. **Tout résultat illisible ne sera pas corrigé.**

Exercice 1 : Intégrales et primitives

[4 points]

- ① Calculer l'intégrale suivante en utilisant une (ou plusieurs) intégration par partie. [2 points]

$$I = \int_{-2}^2 x^2 \sin(x) \, dx$$

- ② Soit

$$A = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 1}$$

- (a) Décomposer A en éléments simples.

[1.5 point]

- (b) En déduire une primitive de A .

[0.5 point]

Exercice 2 : Une suite constante ?

[7 points]

On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 12 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

- ① Calculer a_1 , b_1 , a_2 et b_2 . [0.5 point]

On suppose que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ② Montrer par récurrence que $b_n \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [1.5 point]

- ③ En déduire, que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. [1.5 point]

- ④ Montrer alors que ces deux suites sont convergentes. [1 point]

- ⑤ Soient $a = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n$ et $b = \lim_{x \rightarrow \infty} b_n$. Montrez que $a = b$. [0.5 point]

- ⑥ Quel nom donne-t-on aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant la même limite et des sens de variations contraires ? [0.5 point]

- ⑦ Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = 3a_n + 4b_n$. Montrez que $c_{n+1} = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut on en déduire pour $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$? [0.5 point]

- ⑧ Calculer alors la valeur de a . [1 point]

Bonus : On pourra montrer par récurrence que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en posant $P(n) : "a_n \geq 0 \text{ et } b_n \geq 0"$ par exemple).

Exercice 3 : Probabilités. Mais lesquelles ?

[4 points]

- ① On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses.

(a) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'ampoules qui fonctionnent dans ce lot de 3. Quelle est la loi de X ? Expliquez pourquoi. [1.5 point]

(b) Calculer $P(X = 2)$. [0.5 point]

- ② Dans la population française 3 personnes sur 10000 sont centenaires.

(a) On tire 1000 personnes au hasard dans la population. Soit X , le nombre de personnes centenaire dans ce tirage. Quelle est la loi que suit X ? Expliquez pourquoi. [1.5 point]

(b) Donner la formule pour calculer $P(X \leq 100)$. [0.5 point]

Exercice 4 : Jouets en bois Made in France [5 points]

Une entreprise française fabrique des jouets en bois. Le coût total, exprimé en euros, est donné par la fonction C .

$$C(q) = \frac{q^3}{2} - 5q^2 + 40q + 98$$

où q est la quantité exprimée en nombre de jouets. L'entreprise peut produire entre 0 et 10 jouets dans la journée.

- ① Déterminer les coûts irrécupérables puis le coût total induit par une production de 10 jouets. [0.5 point]
- ② Donner l'expression du coût marginal Cm . [0.5 point]
- ③ (a) Donner l'expression du coût moyen CM . [0.5 point]
(b) Montrer que sa dérivée peut s'écrire : [1 point]

$$CM'(q) = \frac{(q-7)(q^2+2q+14)}{q^2}$$

- ④ Établir le tableau de variation de CM et déterminer la quantité de jouets à produire pour que le coût moyen soit minimal. [1 point]
- ⑤ Comment aurait-on pu trouver ce résultat autrement ? Montrer que l'on obtient ce même résultat avec cette seconde méthode. On rappelle que $q^3 - 5q^2 - 98 = (q-7)(q^2+2q+14)$. [1.5 point]

Dénomination	Loi	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$ $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = q$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = pq$
Loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = npq$
Loi Uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ $P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi Géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ $P(X = k) = pq^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$
Loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, +\infty \rrbracket$ $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$
Loi Hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, m, N)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$ $P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{nm}{N}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n m (N-m)(N-n)}{N^2 (N-1)}$

Exercice 2:

$$\textcircled{1} \quad a_1 = \frac{2a_0 + b_0}{3} = 4$$

$$b_1 = \frac{a_0 + 3b_0}{4} = 9$$

$$a_2 = \frac{2a_1 + b_1}{3} = \frac{17}{3}$$

$$b_2 = \frac{a_1 + 3b_1}{4} = \frac{31}{4}$$

On suppose $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$

$\textcircled{2}$ On pose $P(n)$: " $b_n \geq a_n$ " $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $b_0 = 12 \geq 0 = a_0$

$\Rightarrow P(0)$ vraie

Hérédité: On suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12} \\ &= \frac{-5a_n + 5b_n}{12} \\ &= \frac{5}{12} (b_n - a_n) \end{aligned}$$

$$\text{Or } b_n \geq a_n \Rightarrow b_n - a_n \geq 0$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow b_{n+1} \geq a_{n+1}$$

Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq a_n$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n \\
 &= \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} \\
 &= \frac{b_n - a_n}{3} \geq 0 \text{ d'après } \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

Donc $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc (a_n) est croissante.

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n \\
 &= \frac{a_n + 3b_n - 4b_n}{4} \\
 &= \frac{a_n - b_n}{4} \leq 0 \text{ d'après } \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

Donc $b_{n+1} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Donc (b_n) est décroissante.

$\textcircled{4} \quad (b_n)$ est décroissante et $b_n \geq 0$, Donc b_n est convergente.

(a_n) est croissante et $a_n \leq b_n \leq b_0$, donc a_n est convergente.

$\textcircled{5} \quad$ On passe à la limite dans les définitions de (a_n) et (b_n) :

$$\begin{cases} a = \frac{2a + b}{3} \\ b = \frac{a + 3b}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2a = b \\ 4b - 3b = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = a \end{cases}$$

⑥ (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes.

⑦
$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 3a_{n+1} + 4b_{n+1} \\ &= 2a_n + b_n + a_n + 3b_n \\ &= 3a_n + 4b_n = c_n \end{aligned}$$

Donc (c_n) est une suite constante.

⑧ (c_n) constante $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = c_0$.

"
 $3a + 4b$
" $\longrightarrow$ ⑤
 $7a$

Or $c_0 = 3 \times a_0 + 4 b_0 = 48$

Dann

$$a = \frac{48}{7}$$

Exercise 3:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad I &= \int_{-2}^2 x^2 \sin(x) dx \\ &= \left[x^2 (-\cos(x)) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 2x (-\cos(x)) dx \\ &= -4 \cancel{\cos(2)} + 4 \cancel{\cos(-2)} + \int_{-2}^2 2x \cos(x) dx \\ &= 2 \left(\left[x \sin(x) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 \sin(x) dx \right) \\ &= 2 \left(2 \cancel{\sin(2)} - (-2) \cancel{\sin(-2)} - \left[-\cos(x) \right]_{-2}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\cos(2) - \cos(-2) \right) = 0.$$

$$\textcircled{2} A(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x-1}$$

$$= \frac{2x(x-1) + 2x - 5x - 2}{x-1}$$

$$= 2x + \frac{-3x - 2}{x-1}$$

$$= 2x + \frac{-3(x-1) - 3 - 2}{x-1}$$

$$A(x) = 2x - 3 - \frac{5}{x-1}$$

Donc une primitive de A est :

$$\underline{x^2 - 3x - 5 \ln(|x-1|)}.$$

Exercice 4 :

$$\textcircled{1} (a) \text{ Tirage sans remise } \Rightarrow X \sim \mathcal{HP}(3, 10, 15)$$

$$\begin{aligned} (b) P(X=2) &= \frac{\binom{10}{2} \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2 \times \cancel{8!}} \times 5}{\frac{5 \times \cancel{14!} \times 13 \times \cancel{12!}}{3 \times 2 \times \cancel{12!}}} \\ &= \frac{9 \times 5 \times 5}{5 \times 7 \times 13} = \frac{9 \times 5}{7 \times 13} \end{aligned}$$

$\textcircled{2} (a)$ Comme $p = \frac{3}{10000}$ est petit et $n = 1000$ nombre de tirages est grand $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
où $\lambda = np = 0,3$.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad P(X \leq 100) &= \sum_{k=0}^{100} P(X=k) \\
 &= \sum_{k=0}^{100} e^{-0,3} \frac{(0,3)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Exercice 5:

① Coût irrécupérables : 98 € .

$$\begin{aligned}
 \text{Coût total pour 10 jouets} &: \frac{10^3}{2} - 5 \times 10^2 + 40 \times 10 + 98 \\
 &= 500 - 500 + 400 + 98 \\
 &= 498 \text{ €}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ② \quad C_m(q) &:= C'(q) \\
 &= \frac{3q^2}{2} - 5 \times 2q + 40. \\
 &= \frac{3}{2}q^2 - 10q + 40.
 \end{aligned}$$

$$③ \quad C\pi(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^2}{2} - 5q + 40 + \frac{98}{q}.$$

$$C\pi'(q) = q - 5 - \frac{98}{q^2}$$

$$\text{et } \frac{(q-7)(q^2+2q+14)}{q^2}$$

$$= \frac{q^3 + 2q^2 + 14q - 7q^2 - 14q - 98}{q^2}$$

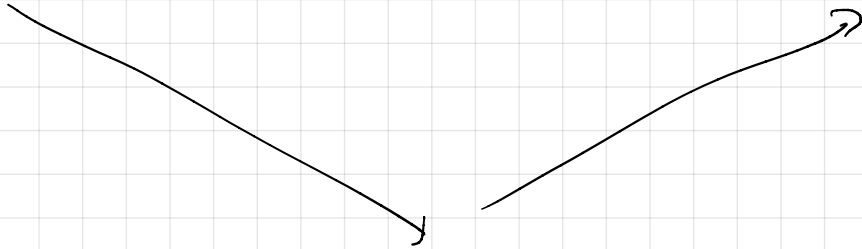
$$= q - \frac{5q^2}{q^2} - \frac{98}{q^2} = q - 5 - \frac{98}{q^2}$$

$$(4) \quad q^2 \geq 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 14 < 0$$

$$\text{Donc } \underline{q^2 + 2q + 14 > 0.}$$

Donc $CM'(q)$ est du même signe que $(q-7)$

q	0	7	10
$CM'(q)$	-	0	+
CM			

Il faut produire 7 jouets pour le coût moyen soit minimal.

(5) On sait que le CM est minimal quand

$$CM(q) = Cm(q)$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{2} - 5q + 40 - \frac{38}{q} = \frac{3}{2}q^2 - 10q + 40.$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{q^3}{2} - 5q^2 + \cancel{40}q - 38 - \frac{3}{2}q^3 + 10q^2 - \cancel{40}q$$

$$\Rightarrow 0 = -q^3 + 5q^2 - 38 = -(q-7)(q^2 + 2q + 14)$$

$$\Rightarrow \boxed{q=7}$$

