

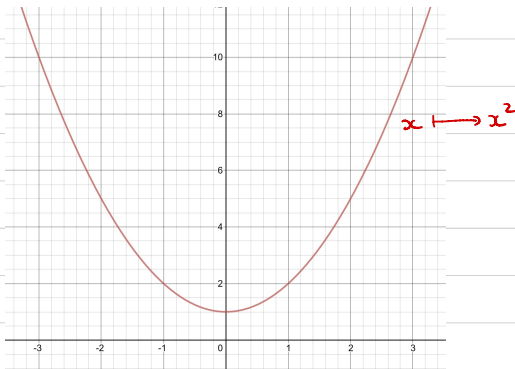
Komplex Zahlen

1. Warum brauchen wir Komplexe Zahlen?

Sei die Gleichung $x^2 + 1 = 0$

Wir lösen sie, indem wir die Diskriminante berechnen:

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ = -4 < 0$$



Also es gibt keine Lösung.

$\mathbb{R}$ ist "zu klein". Wir würden gerne diese Gleichung lösen.

Also Mathematiker haben eine Lösung vorstellen: " i "

für imaginär

Erinnern:

Wenn $ax^2 + bx + c = 0$,
die Diskriminante
ist definiert durch
 $\Delta = b^2 - 4ac$
Es gibt drei
Fälle:

• $\Delta > 0$:
dann es gibt
zwei Lösungen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• $\Delta = 0$:
dann es gibt
eine Lösung:
 $x = \frac{-b}{2a}$

• $\Delta < 0$:
Es gibt keine
Lösung.

Wir haben dann

$$i = \sqrt{-1}$$

$\Rightarrow$

$$i^2 = -1$$

i wird genannt die "imaginär Einheit".

2. Die Menge der komplexen Zahlen

Von dieser "neuen" Zahl können wir die komplex Zahlen definieren. Wir schreiben die Menge dieser Zahlen $\mathbb{C}$ (für "complex" auf Englisch)

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

x ist das Realteil.

Wir schreiben

$$x = \operatorname{Re}(x + iy)$$

y ist das Imaginärteil

Wir schreiben

$$y = \operatorname{Im}(x + iy)$$

Beispiele:

- $\operatorname{Re}(1 + 3i) = 1$
 $\operatorname{Im}(1 + 3i) = 3$
- $\operatorname{Re}(3 - i) = 3$
 $\operatorname{Im}(3 - i) = -1$
- $\operatorname{Re}(5 + i) = 5$
 $\operatorname{Im}(5 + i) = 1$

In $\mathbb{C}$, die Addition und die Multiplikation sind durch ihre Erweiterung der von $\mathbb{R}$ gegeben:

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

- (1) $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$
und
(2) $(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(cb + ad)$

Beobachtung: Diese Gleichungen können wie folgt geschrieben werden:

Für $z, z' \in \mathbb{C}$:

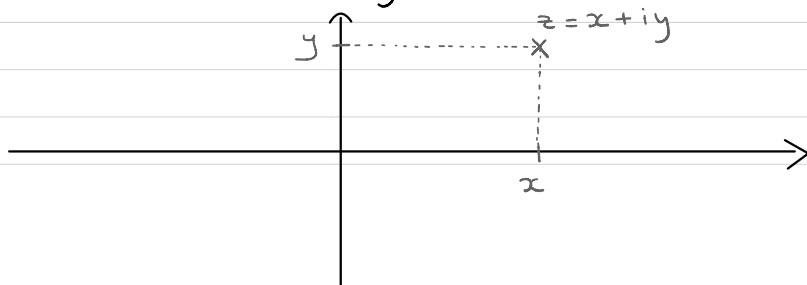
- (1) $\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$
 $\operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$
(2) $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$
 $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z') + \operatorname{Im}(z')\operatorname{Re}(z)$

Beispiele:

- $(3+2i) + (5-i) = 8+i$
- $(-i) + (1+i) = 1$
- $(2+i)(1+2i) = 2 - 2 + i + 4i = 5i$
- $(3-2i)(3+2i) = 9 - 4 = 5$

3. Der komplex Plan

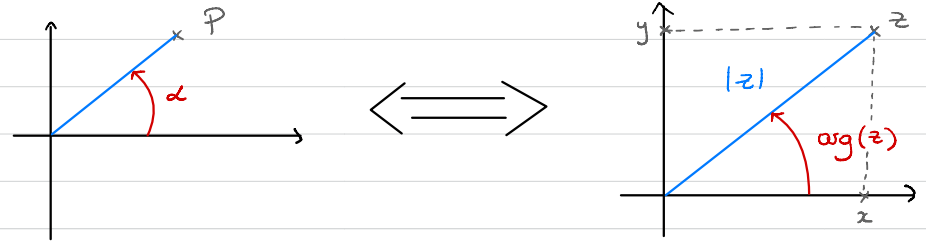
Für jeden komplex Zahl $z = x+iy$, wir assoziieren den Punkt des Plan mit Abszisse "x" und Ordinate "y" (den komplex Plan).



Jeder Punkt P des Plan kann definiert werden von:

- (1) seinem Abstand r mit $(0,0)$
- (2) dem Winkel $(0,1) (0,0) P$, bezeichnet α .

Sie werden als Polarkoordinaten bezeichnet.

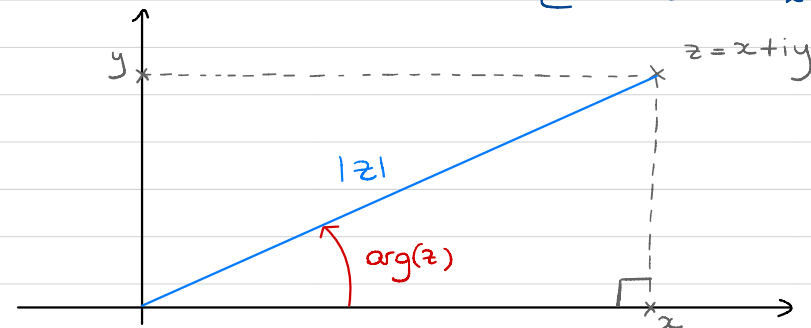


Für einen komplex Zahl sind diese Koordinaten:

- (1) der Betrag $|z|$ von z
- (2) das Argument $\arg(z)$ von z

Beobachtung: Geometrisch können wir die folgenden Gleichungen für " $z = x+iy$ " zeigen.

$$\begin{cases} x = |z| \cos(\arg(z)) \\ y = |z| \sin(\arg(z)) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} |z|^2 = x^2 + y^2 \\ \cos(\arg(z)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin(\arg(z)) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$



für $x^2 + y^2 \neq 0$

Definition: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Wir definieren:

- Der Betrag von z :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Die Argumentfunktion:

$$\begin{aligned} \arg: \mathbb{C} &\longrightarrow [0, 2\pi[\\ z &\longmapsto \arg(z) \end{aligned}$$

so daß

$$z = |z| e^{i \arg(z)}$$

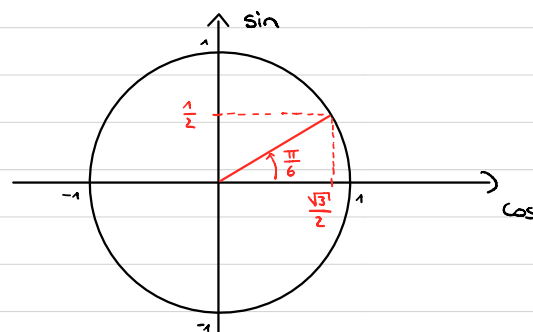
Exponential form

Es ist die Polarform von z genannt.

• Sei $z = \sqrt{3} + i$

Dann $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

und
$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\arg(z)) = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

Beispiele: • Sei $z = 2 + 2i$.

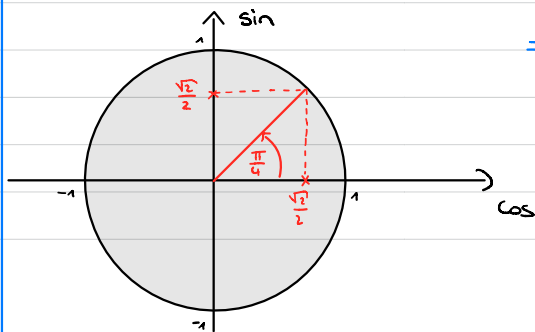
Also $|z|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

und wir haben:

$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arg(z)) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Also $z = 2\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$



Erinnern: Werte von sinus und cosinus zu wissen.

Winkel	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$$

Vorteile von die Polarform

Erinnern: θ : Theta
ist ein griechische
Buchstabe.

Wir haben gesehen, daß die Multiplikation zwischen zwei komplexen Zahlen nicht direkt zu berechnen ist. Mit der Polarform ist es einfacher.

In der Tat, wenn $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, wo $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ und $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$, haben wir:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = \underbrace{r_1 r_2}_{|z_1 z_2|} e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{arg}(z_1 z_2)$$

Hier r_1 und r_2
sind nichts anderes als
 $|z_1|$ und $|z_2|$. Wir haben
auch $\theta_1 = \arg(z_1)$
 $\theta_2 = \arg(z_2)$

$$\text{Und } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{und für } n \in \mathbb{N}_0$$

$$|z_1|^n = (r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n (e^{i\theta_1})^n = r_1^n e^{in\theta_1}$$

Wir haben dann ein sehr einfache Formel für Multiplikation in $\mathbb{C}$.

Satz: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ |z_1^n| &= |z_1|^n \end{aligned}$$

Erinnern:
 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{aligned}$$

$$\arg(z_1^n) = n \arg(z_1)$$

Bemerkung: Um zu verstehen die Polarform Formel

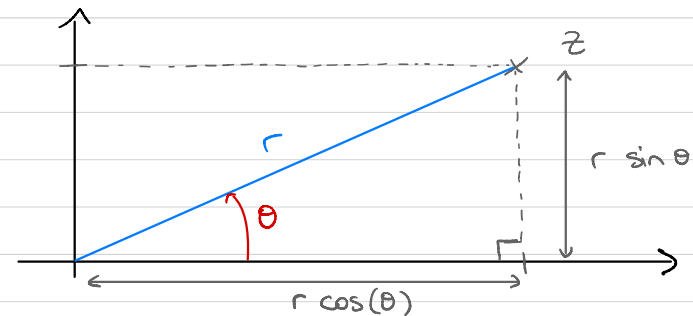
$$z = r e^{i\theta} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}_+ \text{ und } \theta \in [0, 2\pi[$$

wir benutzen die Euler Gleichung für cosinus und sinus:

$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

$$\text{was gibt: } e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Wir can also verstehen warum} \\ z &= r e^{i\theta} \\ &= r \cos(x) + i r \sin(x) \end{aligned}$$



Beispiele: $\frac{4 e^{i\frac{\pi}{3}}}{5 e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{4}{5} e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})} = \frac{4}{5} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$

$\cdot \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\cdot (2e^{i\frac{\pi}{3}})^4 = 16i$

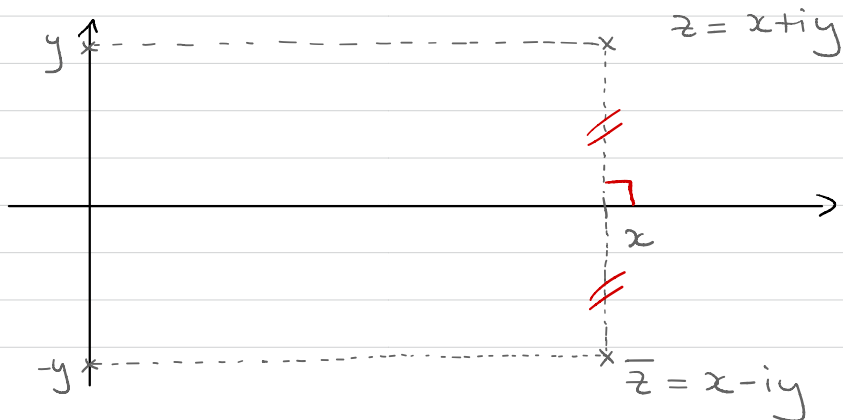
4. Die komplex-konjugierte Zahl

Definition: Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$).

Die komplex-konjugierte Zahl zu z bezeichnet mit $\bar{z}$ ist definiert durch

$$\bar{z} := x - iy$$

Beobachtung: Geometrisch ist der komplex-konjugierte Zahl der symmetrische in Bezug auf die Abszissenachse.



Satz: Für $z \in \mathbb{C}$.

(1) $z \bar{z} = |z|^2$

(2) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Beweis: Es ist klar, daß für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$)
 $z \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$
 (2) folgt.

Beobachtung: Wir können jetzt berechnen einen Bruchteil komplexer Zahlen:

Sei $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dann

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2) + i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$= \underbrace{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\text{Imaginärteil}}$$

Beispiel: Berechnung von Bruchteil komplexer Zahlen.

$\cdot \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(2+1) + i(1-2)}{1^2+1^2}$

$= \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

$\cdot \frac{3-3i}{-1-2i} = \frac{(3-3i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{(-3+6) + i(3+6)}{1^2+2^2}$

$= \frac{3+9i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$

5. Lösungen reeller quadratischer Gleichungen

Von nun an können wir mit komplexen Zahlen jede quadratische Gleichung lösen.

Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$\text{Sei } \underline{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Wir haben die folgenden Lösungen:

$$\cdot \underline{\text{wenn } \Delta > 0:} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\cdot \underline{\text{wenn } \Delta = 0:} \quad x = \frac{-b}{2a}$$

$$\cdot \underline{\text{wenn } \Delta < 0:} \quad x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\begin{aligned} \text{In der Tat, } \Delta &= (-1) \times (-\Delta) \\ &= i^2 \times \underbrace{(-\Delta)}_{>0} \\ &= (i \times \sqrt{-\Delta})^2 \end{aligned}$$

Beispiele: $\cdot x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4$$

Also Δ ist negativ und die Lösungen im $\mathbb{C}$ sind

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i$$

⚠ ACHTUNG: Die Frage kann sein

"Lösen Sie die folgende Gleichung im $\mathbb{R}$:
 $x^2 + 2x + 2 = 0$ "

Hier x ist im $\mathbb{R}$. Also diese Gleichung hat keine Lösung im $\mathbb{R}$.

$$\cdot x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 \times 1 = 16 - 32 = -16$$

Also Δ ist negativ und die Lösungen im $\mathbb{C}$ sind

$$\cdot x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 10 \times 1 = -4 < 0$$

$$\text{Also } x = \frac{6 \pm i\sqrt{4}}{2} = 3 \pm i$$

Wenn $a, b, c \in \mathbb{C}$, sind die Lösungen eigentlich die Gleichen:

Betrachten Sie die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Dann die Lösungen sind

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Aber das Problem ist jetzt die Quadratwurzel einer komplexen Zahl zu berechnen, weil Δ eine komplexe Zahl sein kann. Dies ist das Thema des nächsten Absatzes.

6. Quadratwurzel einer komplexen Zahl.

Sei z eine komplexe Zahl. Wir wollen $x, y \in \mathbb{R}$ so finden, daß

$$(x+iy)^2 = z \quad (*)$$

$$\text{Also } \pm(x+iy) = \sqrt{z}$$

↓

Wir haben immer zwei Lösungen für eine Quadratwurzel!

Mit $(*)$, wir haben $(x^2 - y^2) + (2xy)i = z$

$$\text{damit } \begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z) \\ 2xy = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

$$\text{und } |z| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$$

Also

$$\sqrt{z} = x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z) \\ (2) & x^2 + y^2 = |z| \\ (3) & 2xy = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

(1) und (2) uns ermöglichen x^2 und y^2 zu finden.

Anschließend ermöglichen (3) uns, wenn x und y das gleiche Vorzeichen oder nicht sind.

Beispiele: • Suchen Sie die Quadratwurzeln von $1+i$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$, haben wir

$$(x+iy)^2 = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & x^2 - y^2 = 1 \\ (2) & x^2 + y^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ (3) & 2xy = 1 \end{cases}$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$-(1) + (2) : 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Außerdem (3) gibt uns $xy > 0$

$$\text{Also } z = \sqrt{1+i} \Leftrightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + i)$$

• Suchen Sie die Quadratwurzeln von $3-i$

Für $x, y \in \mathbb{R}$, haben wir

$$(x+iy)^2 = 3-i \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & x^2 - y^2 = 3 \\ (2) & x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ (3) & 2xy = -1 \end{cases}$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$-(1) + (2) : 2y^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Außerdem (3) gibt uns $xy < 0$

$$\text{Also } z = \sqrt{3-i} \Leftrightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{13} - \sqrt{7}i)$$

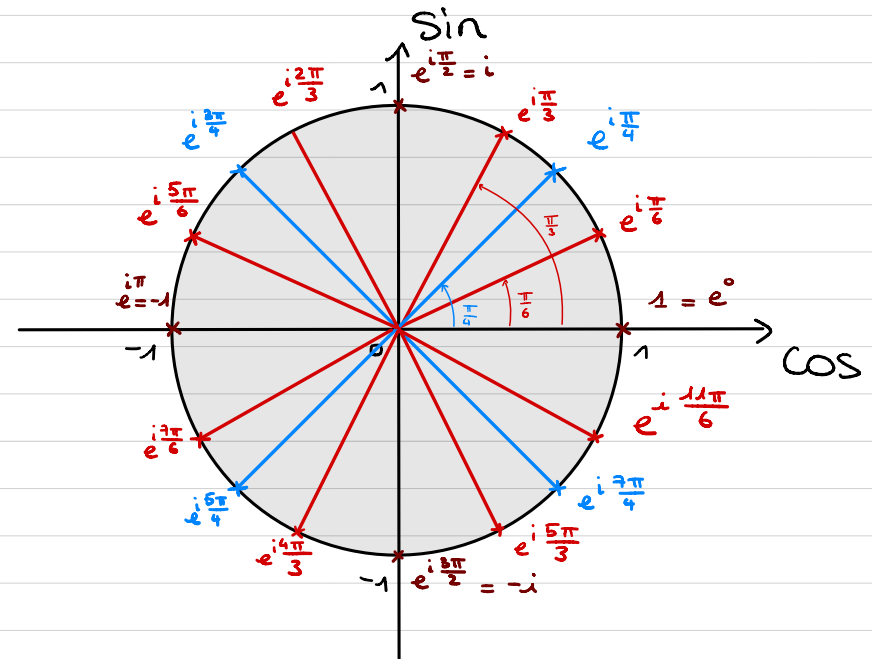
Bemerkung: Es ist einfacher die Quadratwurzeln von einer komplexen Zahl "z" zu finden, wenn "z" auf die exponential form ist.

In der Tat, wenn $z = r e^{i\theta}$, haben wir:

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = \pm \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} = \begin{cases} \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2} + \pi} \end{cases}$$

In der tat, $-1 = e^{i\pi}$

Welche Winkel für cosinus und sinus?



Übungen

Übung 1: Geben Sie den Realteil und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an.

$$z_1 = -2i + 5$$

$$z_5 = \frac{1}{3-i}$$

$$z_7 = \frac{2-i}{i(2+i)}$$

$$z_2 = 15$$

$$z_3 = 6i$$

$$z_6 = \frac{1+i}{3-i}$$

$$z_8 = \frac{15i+2}{3i}$$

$$z_4 = i(3-i)$$

Übung 2: Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 = (2+5i) + (i+3)$$

$$z_4 = i(1-3i)^2$$

$$z_2 = (2+5i)(i+3)$$

$$z_5 = (i+1)^6$$

$$z_3 = \frac{2+5i}{i+3}$$

$$z_6 = (1-i)(1-i)$$

Übung 3: Lösen Sie die folgende Gleichungen. Sie können $z = x+yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben.

$$(1) 2z + i = \bar{z} + 1$$

$$(4) \frac{z-1}{\bar{z}} = 3$$

$$(2) z + 3\bar{z} = 4+i$$

$$(3) 2z - \bar{z} = -2+3i$$

$$(5) \frac{z-1}{3+i} = z+1$$

Übung 4: Geben Sie die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen an.

$$z_1 = 1+i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2i$$

$$z_3 = -5$$

$$z_4 = 4$$

$$z_5 = \frac{i\sqrt{2}}{1-i}$$

$$z_6 = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{(1+i)^5}$$

$$z_7 = \sin(\alpha) + i \cos(\alpha), \text{ wo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Übung 5: Sei $z = r e^{i\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

Geben Sie den Betrag und ein Argument von der folgenden komplexen Zahlen an.

$$(1) z^2$$

$$(4) -z$$

$$(7) 3z$$

$$(2) \bar{z}$$

$$(5) (1+i)z$$

$$(8) iz$$

$$(3) |z|$$

$$(6) \frac{1}{z}$$

$$(9) z^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Übung 6: Sei $z_1 = 1+i\sqrt{3}$

$$z_2 = 1+i$$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

(1) Schreiben Sie z unter die Polarform.

(2) Geben Sie das Realteil und das Imaginärteil von z an.

(3) Bestimmen Sie die genauen Werte von $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Übung 7: (1) Geben Sie die Polarform von $4\sqrt{3} - 4i$

(2) Geben Sie die Polarform von e^z , wo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

(3) Bestimmen Sie die Lösungen von der Gleichung $e^z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Übung 8: Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

(1) $z^2 = 15 - 8i$

(4) $z^2 = 3 + 4i$

(2) $z^2 - 3iz - 2 = 3$

(5) $z^2 - 8 + 6i = 0$

(3) $z^2 - \sqrt{3}z = -1$

(6) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

Übung 9: (1) Berechnen Sie die Nullstellen von $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ im $\mathbb{C}$.

(2) Sei z die Nullstelle mit $\text{Im}(z) > 0$. Skizzieren Sie die Lage von z in der komplexen Ebene (Plan)

Übung 10: Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

(1) $z^5 = -1$

(4) $z^6 = \frac{-1}{1 + i\sqrt{3}}$

(2) $z^4 = i$

(3) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$

(5) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$

Lösungen

Übung 1:

$$z_1 = -2i + 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_1) = 5 \\ \text{Im}(z_1) = -2 \end{cases}$$

$$z_2 = 15 \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_2) = 15 \\ \text{Im}(z_2) = 0 \end{cases}$$

$$z_3 = 6i \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_3) = 0 \\ \text{Im}(z_3) = 6 \end{cases}$$

$$z_4 = i(3 - i) = 3i - i^2 = 3i + 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_4) = 1 \\ \text{Im}(z_4) = 3 \end{cases}$$

$$z_5 = \frac{1}{3-i} \xrightarrow{\overline{(3-i)} = 3+i} \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_5) = \frac{3}{10} \\ \text{Im}(z_5) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{3-i} \xrightarrow{\overline{(3-i)} = 3+i} \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+3i+i+i^2}{3^2+1^2} = \frac{2+4i}{10} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_6) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \\ \text{Im}(z_6) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$z_7 = \frac{2-i}{i(2+i)} = \frac{2-i}{2i-1} \xrightarrow{\overline{(2i-1)} = -2i-1} \frac{(2-i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = \frac{-4i-2+2i^2+i}{2^2+1^2} = \frac{-4-3i}{5} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_7) = -\frac{4}{5} \\ \text{Im}(z_7) = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$z_8 = \frac{15i+2}{3i} = \frac{(15i+2) \times (i^2)}{3i \times i^2} = \frac{(15i+2)(-i)}{3} = \frac{-15i^2-2i}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3}i \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_8) = \frac{15}{3} \\ \text{Im}(z_8) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Übung 2:

$$z_1 = (2+5i) + (i+3) = 5+6i$$

$$z_2 = (2+5i)(i+3) = 2i + 2 \times 3 + 5i \times i + 5i \times 3 = 1+17i$$

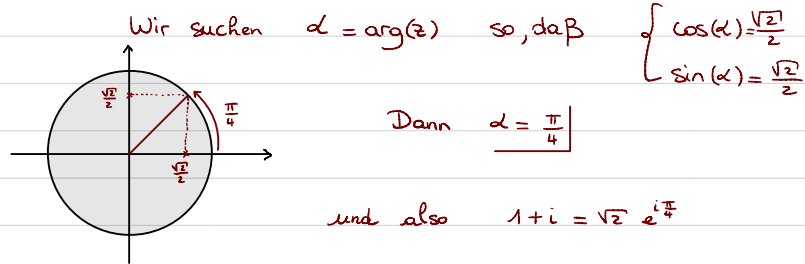
$$z_3 = \frac{2+5i}{i+3} \xrightarrow{\overline{(i+3)} = -i+3} \frac{(2+5i)(-i+3)}{(i+3)(-i+3)} = \frac{-2i+6-5i^2+15i}{1^2+3^2} = \frac{11+13i}{10}$$

$$z_4 = i(1-3i)^2 = i(1^2 + (-3i)^2 + 2 \times 1 \times (-3i)) = i(1-9-6i) = -8i+6$$

$$z_5 = (i+1)^6$$

Wir haben $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\text{Also } 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$



$$\begin{aligned} \text{Wir haben dann } z_5 &= (1+i)^6 = \sqrt{2}^6 (e^{i\frac{\pi}{4}})^6 = 8 e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) \\ &= 8(0 + i \cdot (-1)) = \underline{-8i} \end{aligned}$$

$$z_6 = (1-i)(1-i) = |1-i|^2 = 1^2 + 1^2 = \underline{2}$$

Übung 3:

(1) $2z+i = \bar{z}+1$. Sei $z = x+iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Also (1)} \Leftrightarrow 2(x+iy)+i = x-iy+1$$

$$\Leftrightarrow \underline{2x+2yi+i} - \underline{x+iy-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{Realteil} & \text{Imaginärteil} \end{matrix} \quad \underline{(x-1)} + i \underline{(3y+1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 3y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{Also die Lösung von (1) ist} \quad \underline{z = 1 - \frac{1}{3}i}$$

(2) $z+3\bar{z} = 4+i$. Sei $z = x+iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Also (2)} \Leftrightarrow (x+iy) + 3(x-iy) = 4+i$$

$$\Leftrightarrow \underline{x+iy+3x-3yi-4-i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{(4x-4)} + i \underline{(-2y-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=0 \\ -2y-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Also die Lösung von (2) ist} \quad \underline{z = 1 - \frac{1}{2}i}$$

(3) $2z - \bar{z} = -2+3i$. Sei $z = x+iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Also (3)} \Leftrightarrow 2(x+iy) - (x-iy) = -2+3i$$

$$\Leftrightarrow \underline{2x+2yi-x+iy+2-3i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{(x+2)} + i \underline{(3y-3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 3y-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Also die Lösung von (3) ist

$$\underline{z = -2 + i}$$

(4) $\frac{z-1}{\bar{z}} = 3 \Leftrightarrow z-1 = 3\bar{z}$. Sei $z = x+iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Also (4)} \Leftrightarrow x+iy-1 = 3(x-iy)$$

$$\Leftrightarrow \underline{x+iy-1-3x+3yi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{(-2x-1)} + i \underline{(3y+1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1=0 \\ 3y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{Also die Lösung von (4) ist} \quad \underline{z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i}$$

(5) $\frac{z-1}{3+i} = z+1 \Leftrightarrow z-1 = (z+1)(3+i)$. Sei $z = x+iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Also (5)} \Leftrightarrow (x+iy)-1 = ((x+iy)+1)(3+i)$$

$$\Leftrightarrow x+iy-1 = 3x+3yi+3+ix+i^2y+i$$

$$\Leftrightarrow \underline{x+iy-1-3x-3yi-3-ix+y-i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{(-2x+y-4)} + i \underline{(-2y-x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-4=0 \\ -2y-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \underline{4+2x} \\ -2(4+2x)-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4+2x \\ -8-4x-x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4+2x \\ x = \underline{-\frac{5}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4+2 \cdot \left(-\frac{5}{5}\right) = \frac{20}{5} - \frac{10}{5} = \frac{10}{5} \\ x = -\frac{5}{5} \end{cases} \quad \text{Also die Lösung von (5) ist} \quad \underline{z = -\frac{5}{5} + \frac{2}{5}i}$$

Übung 4:

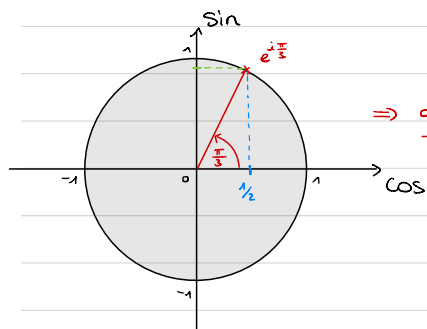
$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

Also man hat

$$z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

und wir suchen α so, daß:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

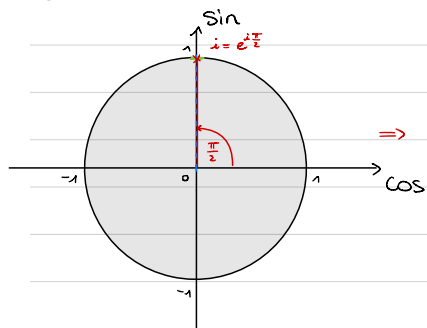
$$\text{Also } z_1 = |z_1| e^{i\alpha} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 2i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

Also man hat: $z_2 = 2(0 + 1i)$

und wir suchen α so, daß:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \\ \sin(\alpha) = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Also } z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

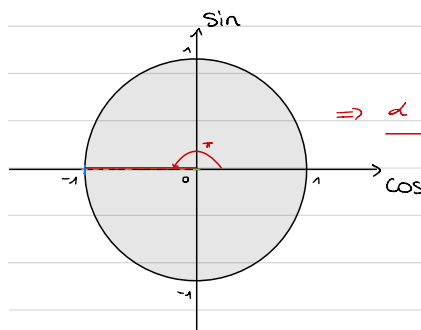
$$z_3 = -5 \Rightarrow |z_3| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$$

Also man hat

$$z_3 = 5(-1 + 0i)$$

und wir suchen α so, daß:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = -1 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \alpha = \pi$$

$$\text{Also } z_3 = 5 e^{i\pi}$$

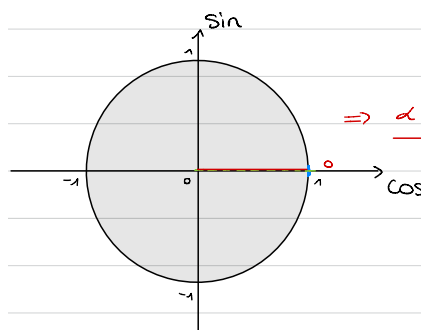
$$z_4 = 4 \Rightarrow |z_4| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

Also man hat

$$z_4 = 4(1 + 0i)$$

und wir suchen α so, daß:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = 1 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$



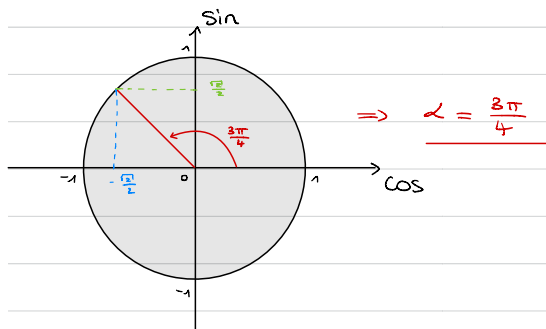
$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Also } z_4 = 4 e^{i0}$$

$$z_5 = \frac{i\sqrt{2}}{1-i} = \frac{i\sqrt{2} \times (1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}i - \sqrt{2}}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow |z_5| = 1$$

Also wir suchen α so, daß: $\begin{cases} \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



Dann $z_5 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$z_7 = \sin(\alpha) + i \cos(\alpha), \text{ wo } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$z_7 = e^{i\alpha}$$

Übung 5: $z = r e^{i\theta}$

$$(1) z^2 = (r e^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow |z^2| = r^2 \text{ und } \arg(z^2) = 2\theta$$

Erinnern: $|e^{i\alpha}| = \sqrt{\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$(2) \bar{z} = \overline{r e^{i\theta}} = \overline{r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = r (\cos(\theta) - i \sin(\theta)) = r (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = r e^{-i\theta}$$

Erinnern: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$; $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$$(3) |z| = |r e^{i\theta}| = |r| |e^{i\theta}| = r \times 1 = r$$

$$(4) -z = -r e^{i\theta} = e^{i\pi} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+\pi)}$$

$$(5) (1+i)z = \underline{b} z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} r e^{i\theta} = (\sqrt{2}r) e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$(6) \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$(7) 3z = (3r) e^{i\theta}$$

$$(8) iz = i r e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$$

$$(9) z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z_6 = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{(1+i)^5}, \text{ Sei } a = 1-i\sqrt{3} \text{ und } b = 1+i$$

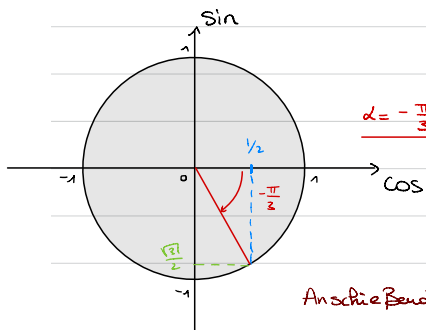
Also $|a| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 2$ und $b = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } b = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Wir suchen α und β so, daß:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ und } \begin{cases} \cos(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$



$$\alpha = -\frac{\pi}{3}$$

Dann $a = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

und $b = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow a^3 = (2 e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 = 2^3 e^{-i\frac{\pi}{3} \times 3} = 8 e^{-i\pi} = 8 e^{i\pi}$$

$$b^5 = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Anschließend haben wir,

$$z_6 = \frac{a^3}{b^5} = \frac{8 e^{i\pi}}{4\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i(\pi - \frac{5\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Übung 6: Sei $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$$z_2 = 1 + i$$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

(1) z_1 ist "z, in der Übung 4" $\Rightarrow z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$

z_2 ist "b für z_6 in der Übung 4" $\Rightarrow z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\text{Also } z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

(2) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3}) \times (1 - i)}{(1 + i) \times (1 - i)} = \frac{1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 + 1}$

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

(3) Wir wissen daß $z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

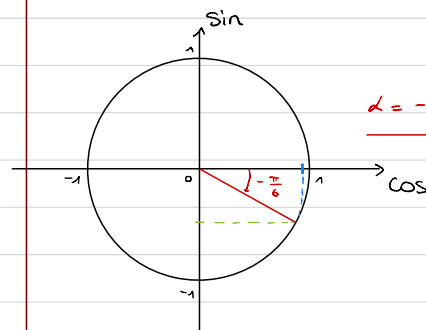
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Re}(z) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Übung 7: (1) $|4\sqrt{3} - 4i| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8$

$$\text{Also } 4\sqrt{3} - 4i = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

Wir suchen dann α so, daß $\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\alpha) = -\frac{1}{2} \end{cases}$



$$\Rightarrow 4\sqrt{3} - 4i = 8 e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(2) Sei $z = x + iy$. Dann $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$
Wir haben $e^x > 0$ und $|e^z| = |e^x| |e^{iy}| = e^x = 1$

Und $\arg(e^z) = y$.

(3) $e^z = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow e^x e^{iy} = 8 e^{-i\frac{\pi}{6}}$
 $\Rightarrow \begin{cases} 8 = e^x & \Leftrightarrow x = \ln(8) \\ y = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$\text{Also } z = \ln(8) - i\frac{\pi}{6}$$

Übung 8 :

$$(1) \quad z^2 = 15 - 8i$$

$$\text{Sei } z = x + iy, \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} \\ = 17 \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = 15 \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy = -8 \quad (3)$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 17 + 15 = 32$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$(1) - (2) : 2y^2 = 17 - 15 = 2 \Rightarrow y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = \pm 1$$

Wir möchten wissen, ob x und y das gleiche Vorzeichen haben.

(3) gibt uns, daß $xy < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \text{ positiv} & \Rightarrow y \text{ negativ} \\ x \text{ negativ} & \Rightarrow y \text{ positiv} \end{cases}$$

Dann sind die Lösungen: $z = \pm (4 - i)$

mit anderen Worten: $4 - i$ und $-4 + i$

$$(2) \quad z^2 - 3iz - 2 = 3 \Leftrightarrow z^2 - 3iz - 5 = 0$$

$$\text{Wir berechnen: } D = (-3i)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 11$$

$$\text{Die Lösungen sind } x = \frac{3i \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$(3) \quad z^2 - \sqrt{3}z = -1 \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$\text{Wir berechnen: } D = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1$$

$$\text{Die Lösungen sind } x = \frac{\sqrt{3} \pm i\sqrt{1}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$$

$$(4) \quad z^2 = 3 + 4i \quad \text{Sei } z = x + iy, \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

$$|z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \\ = \sqrt{25} \\ = 5 \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = 3 \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy = 4 \quad (3)$$

$$\text{Also } (1) + (2) \text{ gibt: } 2x^2 = 5 + 3 = 8 \\ \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{und } (1) - (2) \text{ gibt: } 2y^2 = 5 - 3 = 2 \\ \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Wir haben (3) $xy > 0$

Also x und y haben das gleiche Vorzeichen.

Die Lösungen sind dann $z = \pm (2 + i)$

$$(5) z^2 - 8 + 6i = 0 \quad (\Rightarrow) \quad z^2 = 8 - 6i$$

Denken Sie daran, daß dies ist wie die Berechnung der Wurzeln von $8 - 6i$.

Sei $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Dann } \begin{cases} x^2 + y^2 = |z|^2 = |8 - 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(8 - 6i) = 8 & (2) \\ 2xy = \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(8 - 6i) = -6 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Also } (1) + (2) \text{ gibt: } 2x^2 = 10 + 8 = 18 \\ \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \underline{x = \pm 3}$$

$$\text{und } (1) - (2) \text{ gibt: } 2y^2 = 10 - 8 = 2 \\ \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \underline{y = \pm 1}$$

Wir haben (3) $xy < 0$

Also x und y haben gegenteiligen Vorzeichen. ("signes contraires")

Die Lösungen sind dann $\boxed{z = \pm (3 - i)}$

mit anderen Worten: $\underline{3 - i}$ und $\underline{-3 + i}$

$$(6) iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Wir berechnen: } \Delta &= (4i - 3)^2 - 4 \times i \times (i - 5) \\ &= -16 + 9 - 24i + 20i + 4 \\ &= -3 - 4i \end{aligned}$$

$$\text{Die Lösungen sind } \underline{x = \frac{3 - 4i \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2i}}$$

Also wir müssen die Wurzeln von $\Delta = -3 - 4i$ berechnen

Sei $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$ so, daß

$$z^2 = -3 - 4i = \Delta \quad (\Rightarrow z = \pm \sqrt{\Delta})$$

$$\text{Dann } \begin{cases} x^2 + y^2 = |z|^2 = |-3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(-3 - 4i) = -3 & (2) \\ 2xy = \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(-3 - 4i) = -4 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Also } (1) + (2) \text{ gibt: } 2x^2 = 5 - 3 = 2 \\ \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \underline{x = \pm 1}$$

$$\text{und } (1) - (2) \text{ gibt: } 2y^2 = 5 - (-3) = 8 \\ \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \underline{y = \pm 2}$$

Wir haben (3) $xy < 0$

Also x und y haben gegenteiligen Vorzeichen. ("signes contraires")

Die Lösungen sind dann $z = \pm (1 - 2i)$

mit anderen Worten: $\underline{1 - 2i}$ und $\underline{-1 + 2i}$

Also sind die Lösungen von (6):

$$\frac{3 - 4i + \underline{1 - 2i}}{2i} = \frac{4 - 6i}{2i} = \frac{4i + 6}{2 \times i^2} = \boxed{-3 - 2i}$$

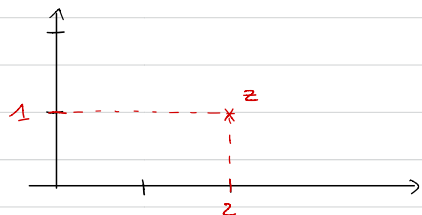
$$\frac{3 - 4i - \underline{1 + 2i}}{2i} = \frac{2 - 2i}{2i} = \frac{2(i + 1)}{2 \times (-1)} = \boxed{-i - 1}$$

Übung 9: (1) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

Wir berechnen: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$

Die Lösungen sind: $x = \frac{4 \pm 2i}{2} = \underline{2 \pm i}$

(2) Wir haben $z = 2 + i$.



Übung 10:

(1) $z^5 = -1$

Sei $z = r e^{i\theta}$, mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [0, 2\pi[$

Also $z^5 = r^5 e^{i5\theta} = -1$

Wir haben: $|z^5| = r^5 = |-1| = 1$

Also $r = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$ (Erinnern: r ist eine positiv reelle Zahl)

$\arg(z^5) = 5\theta = \arg(-1)$

Aber wir wissen, daß $-1 = -1 + 0i = \cos(\pi) + \sin(\pi)i$

$\Rightarrow \arg(-1) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Also $5\theta = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{\pi(2k+1)}{5}$

Dann die Lösungen sind: $z = \left\{ e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}} \right\}$

Wenn Sie eine große Potenz einer komplexen Zahl berechnen müssen, benutzen Sie die Exponentialform an.

5 Lösungen wegen z^5

Erinnern:

Wenn $z_1 = z_2$, haben wir $\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \end{cases}$

(2) $z^4 = i$

Sei $z = r e^{i\theta}$, mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [0, 2\pi[$

Also $z^4 = r^4 e^{i4\theta} = i$ und wir haben: $|z^4| = r^4 = |i| = 1$

Also $r = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$

$\arg(z^4) = 4\theta = \arg(i)$

Aber wir wissen, daß $i = 0 + 1i = \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})i$

$\Rightarrow \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Also $4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi(4k+1)}{8}$

Dann die Lösungen sind:

$$z = \left\{ e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{9\pi}{8}}, e^{i\frac{13\pi}{8}} \right\}$$

4 Lösungen wegen z^4

$$\triangle e^{i\frac{17\pi}{8}} = e^{i(\frac{\pi}{8} + 2\pi)} = e^{i\frac{\pi}{8}}$$

(3) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$

Sei $z = r e^{i\theta}$, mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [0, 2\pi[$

Also $z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 1 + i\sqrt{3}$ und wir haben: $|z^3| = r^3 = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

Also $r^3 = 2 \Rightarrow r = 2^{1/3}$

$\arg(z^3) = 3\theta = \arg(1 + i\sqrt{3})$

Aber wir wissen, daß $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{3})i \right)$

$\Rightarrow \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Also $3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi(6k+1)}{9}$

Dann

$$z = \left\{ 2^{1/3} e^{i\frac{\pi}{9}}, 2^{1/3} e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2^{1/3} e^{i\frac{13\pi}{9}} \right\}$$

3 Lösungen

Sehr wichtig: Ein argument ist immer "modulo 2π " gegeben, weil die Winkeln $\theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \theta - 2\pi, \theta - 4\pi, \dots$ dieselben sind.

← Frage (1)

$$(4) z^6 = \frac{-1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{e^{i\pi}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2} e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

← Frage (3)

Sei $z = r e^{i\theta}$, mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [0, 2\pi[$.

Also $z^6 = r^6 e^{i6\theta} = \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und wir haben: $|z^6| = r^6 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$
 Also $r = 2^{-1/6} \Rightarrow z = 2^{-1/6} e^{i\theta}$

und $\arg(z^6) = 6\theta = \arg\left(\frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi(3k+1)}{9}$

Dann die Lösungen sind:

$$\left\{ 2^{-1/6} e^{i\frac{\pi}{9}}, 2^{-1/6} e^{i\frac{4\pi}{9}}, 2^{-1/6} e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2^{-1/6} e^{i\frac{10\pi}{9}}, 2^{-1/6} e^{i\frac{13\pi}{9}}, 2^{-1/6} e^{i\frac{16\pi}{9}} \right\}$$

6 Lösungen

(5) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$. Sei $\frac{z+1}{z-1} = r e^{i\theta}$,
 mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [0, 2\pi[$.

$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = r^5 e^{i5\theta}$. Also $|1| = 1 = r^5 \Rightarrow r = 1$

und $\arg(1) = 2k\pi = 5\theta \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5}$

Also $\frac{z+1}{z-1}$ kann sein $\left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}} \right\}$

für $k=5: e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$
 Also das ist das selbe für $k=0$.

Außerdem $\frac{z+1}{z-1} = w \Leftrightarrow z+1 = wz-w \Leftrightarrow (1-w)z = -w-1$
 $\Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-1}$ ob $w \neq 1$

Ob $w = 1$: $\frac{z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z+1 = z-1 \Leftrightarrow 1 = -1 \rightarrow$ absurd

Es gibt keine Lösung für $\frac{z+1}{z-1} = 1$

Also die Lösungen für z sind: $\left\{ \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1}, \frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{4\pi}{5}}-1}, \frac{e^{i\frac{6\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{6\pi}{5}}-1}, \frac{e^{i\frac{8\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{8\pi}{5}}-1} \right\}$

Wir ersetzen "w" durch

$$\left\{ e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}} \right\}$$