

II - Equation différentielle du 2nd ordre

$$(*) \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

$$\underline{a, b, c \in \mathbb{R}}$$

1 - Equation homogène

$$(*_H) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

Idee: on remplace $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$

$$(*_H) \quad ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rx} \underbrace{(ar^2 + br + c)} = 0$$

Equation caractéristique de $(*_H)$

$$\Delta = b^2 - 4ac:$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Théorème:

① Si $\Delta > 0$: r_1, r_2 2 s°:

Solutions de $(*_H)$

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

② Si $\Delta = 0$: r_0 1 s° (racine double)

Solutions de $(*_H)$

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

③ Si $\Delta < 0$: pas de solution.

$$-\Delta > 0,$$

$$\underline{\alpha = \frac{-b}{2a}}$$

$$\underline{\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemples: $y'' - y' - 2y = 0$ (*)

L'équation caractéristique de (*) est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$r_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$r_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

Donc les solutions de (*) sont de la forme:

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-x}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

"Donnez la solution vérifiant $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$."

$$y(0) = \lambda + \mu = 0$$

$$y'(0) = 2\lambda - \mu = 1$$

$$y(0) + y'(0) = 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } y(x) = \frac{1}{3} (e^{2x} - e^{-x})$$

(Cauchy-Lipshitz).

2 - Equation avec second membre

$$(*) \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

1^{er} cas: $f(x) = P(x) e^{\gamma x}$

où P est un polynôme.

$$y_0(x) = e^{\gamma x} Q(x) x^m$$

où Q est un polynôme de même degré que P .
et $m \in \mathbb{N}$ est donné si dessous:

- si $\gamma \neq r_1, r_2, r_0$: $m = 0$
- si $\gamma = r_1$ ou r_2 : $m = 1$
- si $\gamma = r_0$: $m = 2$.

2^{ème} cas: $f(x) = e^{\gamma x} \left(P_1(x) \cos(\delta x) + P_2(x) \sin(\delta x) \right)$

où P_1 et P_2 sont des polynômes
et γ et $\delta \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont:

- $\gamma = \alpha$ et $\delta = \beta, -\beta$ (Dans le théorème)

$$y_0(x) = x e^{\gamma x} \left(Q_1(x) \cos(\delta x) + Q_2(x) \sin(\delta x) \right)$$

• Sinon

$$y_0(x) = \left(e^{\gamma x} Q_1(x) \cos(\delta x) + Q_2(x) \sin(\delta x) \right)$$

où Q_1 et Q_2 sont des polynômes
de degré $\leq \max(\deg P_1, \deg P_2)$

En pratique on prend Q_1 et Q_2
de même degré que $\max(\deg P_1, \deg P_2)$

Exemple: $y'' + 3y' + 2y = x e^x$ (*)

① Equation homogène:

(*)_H $y'' + 3y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique de (*)_H est:

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$$

$$r_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$r_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

Donc les solutions de (*)_H sont de la forme:

$$y_H(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

② Comme (*) a un second membre égal à $x e^x$ donc on peut chercher une solution particulière de la forme:

$$y_0(x) = (ax + b) e^x$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Supposons que y_0 vérifie (*)

On a alors

$$y_0'' + 3y_0' + 2y_0 = x e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x (\underline{ax+b+2a}) + \underline{3} e^x (\underline{ax+b+a}) + \underline{2} e^x (\underline{ax+b}) = \underline{2} e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x ((\underline{6a-1})x + (\underline{6b+5a})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-1=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{6} \\ 6b+5a=0 \Leftrightarrow b=-\frac{5}{36} \end{cases}$$

$$\text{Donc } y_0(x) = e^x \left(\frac{1}{6}x - \frac{5}{36} \right)$$

$$\underline{y_0(x) = \frac{1}{36} e^x (6x-5)}$$

③ Conclusion: les solutions de l'équation différentielle (*) sont de la forme :

$$y(x) = y_0(x) + y_H(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{36} e^x (6x-5) + \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} \quad \text{ou } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$y_0'(x) = a e^x + (ax+b) e^x = e^x (ax+b+a)$$

$$y_0''(x) = a e^x + e^x (ax+b+a) = e^x (ax+b+2a)$$

"Donnez la solution telle que

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1"$$

$$\underline{0 = y(0) = -\frac{5}{36} + \lambda + \mu} \quad (1)$$

$$\text{et } y'(x) = \frac{1}{36} e^x (6x-5) + \frac{1}{6} e^x - \lambda e^{-x} - 2\mu e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{36} e^x (6x-5) + \frac{1}{6} e^x - \lambda e^{-x} - 2\mu e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{36} e^x (6x+1) - \lambda e^{-x} - 2\mu e^{-2x}$$

$$\underline{y'(0) = 1 = \frac{1}{36} - \lambda - 2\mu} \quad (2)$$

$$(1) + (2) : -\frac{4}{36} - \mu = 1$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{40}{36} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{5}{36} - \frac{10}{9} = -\frac{35}{36}$$

Méthode de variation de la constante.

$$(*) ay'' + by' + cy = f(x)$$

On a déjà résolu l'équation $\tilde{h}$
et les solutions sont de la forme:

$$\lambda g_1(x) + \mu g_2(x) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Par exemple: $g_1(x) = \begin{cases} e^{r_1 x} \\ e^{r_2 x} \\ e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{cases}$ et $g_2(x) = \begin{cases} e^{r_2 x} \\ x e^{r_2 x} \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}$

On considère λ, μ comme des fonctions
pour les faire varier.

On pose y_0 une solution particulière
de la forme:

$$y_0(x) = h_1(x) g_1(x) + h_2(x) g_2(x)$$

On suppose que h_1 et h_2 vérifient

$$(*)_{eq} \begin{cases} h_1' g_1 + h_2' g_2 = 0 \\ h_1' g_1' + h_2' g_2' = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

$$y_0' = h_1' g_1 + h_1 g_1' + h_2' g_2 + h_2 g_2'$$

$$\Rightarrow \underline{y_0' = h_1 g_1' + h_2 g_2'}$$

$$y_0'' = h_1' g_1' + h_1 g_1'' + h_2' g_2' + h_2 g_2''$$

$$\Rightarrow \underline{y_0'' = \frac{f(x)}{a} + h_1 g_1'' + h_2 g_2''}$$

$$(*) a \overbrace{y_0''} + b \overbrace{y_0'} + c y_0$$

$$= f(x) + a h_1 g_1'' + a h_2 g_2''$$

$$+ b h_1 g_1' + b h_2 g_2'$$

$$+ c h_1 g_1 + c h_2 g_2$$

$$= f(x) + h_1 (a g_1'' + b g_1' + c g_1) + h_2 (a g_2'' + b g_2' + c g_2)$$

car g_1 et g_2 sont solutions de l'équation
homogène.

$$= f(x)$$

Donc y_0 est solution
de (*)

Exemple: Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

① L'équation homogène est alors:

$$(E_h) \quad y'' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est alors

$$r^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$$

Pas de solutions réelles.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = 0$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{-(-4)}}{2} = 1.$$

Donc les solutions de l'équation (E_h)
sont de la forme:

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

$$\underline{y_h(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

② On utilise la méthode de
variation des constantes.

On pose $y_0 = h_1 \cos(x) + h_2 \sin(x)$

où h_1, h_2 sont des fonctions telles
que:

$$\begin{cases} h_1' \cos(x) + h_2' \sin(x) = 0 & \times \sin(x) \\ -h_1' \sin(x) + h_2' \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} & \times \cos(x) \end{cases}$$

Dans ces conditions, y_0 vérifie (E) .

$$\begin{cases} h_1' \cos(x) \sin(x) + h_2' (\sin(x))^2 = 0 & (1) \\ -h_1' \sin(x) \cos(x) + h_2' (\cos(x))^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) + (2): h_2' = 1$$

$$\Rightarrow h_2 = x + C, C \in \mathbb{R}.$$

(1) dérivée : $h_1' = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ $\frac{u'}{u}$

Donc $h_1(x) = \ln(\cos(x)) + C$
 $C \in \mathbb{R}.$

Donc $y_0(x) = \ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x)$
est solution particulière de (E)

③ Conclusion :

les solutions de l'équation
différentielle (E) sont de la forme :

$$y(x) = y_0(x) + y_H(x)$$