

1 Calculer la primitive de $\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$.

Posons $f(x) = \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$

On teste les 3 possibilités vue en cours.

$$\begin{aligned} f(-x) d(-x) &= \frac{\cos^3(-x)}{\sin^5(-x)} (-dx) = \frac{\cos^3(x)}{-\sin^5(x)} (-dx) \\ &= f(x) dx \end{aligned}$$

1 Donc on peut faire le chgt de var.

$$\begin{cases} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{cases}$$

2 Ici on calcule une primitive, donc pas besoin de calculer les bornes (Il n'y en a pas...)

3 $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx = - \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^6(x)} \underline{(-\sin(x)) dx}$

$$= - \int \frac{\cos^3(x)}{(\sin^2(x))^3} \underline{(-\sin(x)) dx}$$

$$= - \int \frac{\cos^3(x)}{(1 - \cos^2(x))^3} \underline{(-\sin(x)) dx}$$

$$= - \int \frac{t^3}{(1 - t^2)^3} dt$$

→ Tout est réuni pour que le changement de variable se passe bien.

La primitive se réduit au calcul d'une primitive de fonction rationnelle.

$$- \int \frac{t^3}{(1-t^2)^3} dt = - \int \frac{t^3}{(1-t)^3 (1+t)^3} dt$$

$$= - \int \frac{3/16}{(1+t)^2} + \frac{-1/8}{(1+t)^3} + \frac{-3/16}{(1-t)^2} + \frac{1/8}{(1-t)^3} dt$$

A faire par vous-même

$$\begin{aligned} &= -\frac{3}{16} \int (1+t)^{-2} dt + \frac{1}{8} \int (1+t)^{-3} dt \\ &\quad + \frac{3}{16} \int (1-t)^{-2} dt - \frac{1}{8} \int (1-t)^{-3} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{3}{16} \frac{(1+t)^{-1}}{-1} + \frac{1}{8} \frac{(1+t)^{-2}}{-2} + \frac{3}{16} \frac{(1-t)^{-1}}{-1} \times \overset{\substack{\text{dérivée de} \\ 1-t}}{(-1)} \\ &\quad - \frac{1}{8} \times \frac{(1-t)^{-2}}{-2} \times \overset{\substack{\text{dérivée de} \\ 1-t}}{(-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} \left(3(1+t)^{-1} - (1+t)^{-2} + 3(1-t)^{-1} - (1-t)^{-2} \right)$$

Donc on remplaçant $t = \cos(x)$
On veut la primitive en fonction de "x".

$$F(x) = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{1 + \cos(x)} - \frac{1}{(1 + \cos(x))^2} + \frac{3}{1 - \cos(x)} - \frac{1}{(1 - \cos(x))^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{16} \left(\frac{3 \sin^2(x) (1 - \cos x) - (1 - \cos x)^2 + 3 \sin^2(x) (1 + \cos(x)) - (1 + \cos(x))^2}{\sin^4 x} \right) \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{6 \sin^2(x) - 2 - 2 \cos^2(x)}{\sin^4 x} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{3 - 3 \cos^2(x) - 1 - 1 \cos^2(x)}{\sin^4(x)} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - 2 \cos^2(x)}{\sin^4(x)} \right)
 \end{aligned}$$

Remarque : On peut vérifier que si $G(x) = \frac{\cos^4(x)}{\sin^4(x)}$:

$$G'(x) = \frac{-4 \sin(x) \cos^3(x) \sin^4(x) - 4 \sin^3(x) \cos^5(x)}{\sin^8(x)}$$

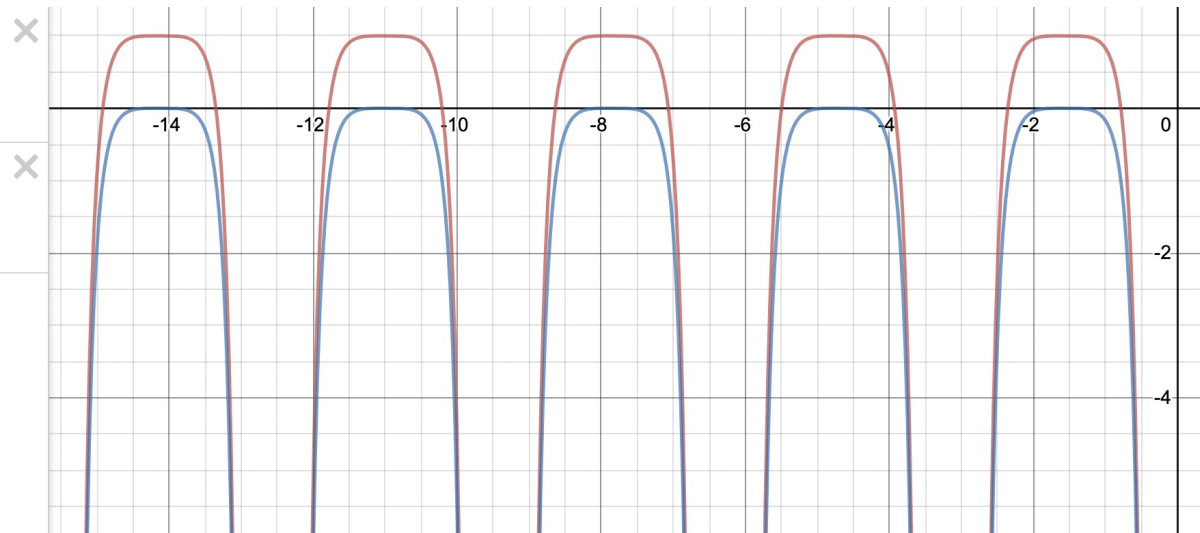
$$= 4 \frac{\cos^3(x) (\sin^2(x) - \cos^2(x))}{\sin^5(x)}$$

$$= -4 \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$$

Ce qui est intéressant c'est que ces deux primitives semblent complètement différentes, mais pourtant elles ne sont décalées que de "1" l'une de l'autre. (Voir graphe)

Pouvez vous le démontrer?

- 1  $\frac{(1 - 2 \cos(x)^2)}{\sin(x)^4}$
- 2  $-\frac{\cos(x)^4}{\sin(x)^4}$
- 3



2

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)} dx$$

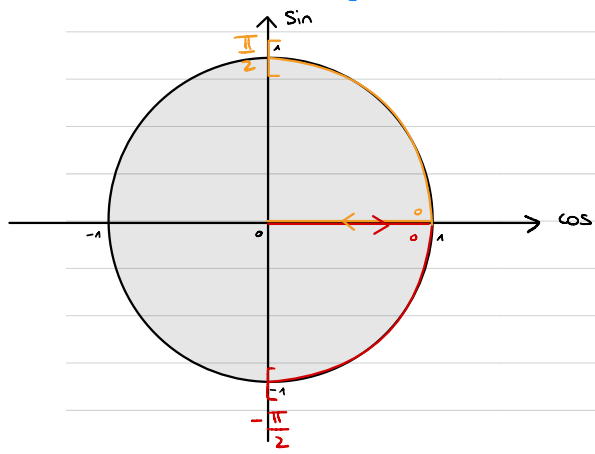
$\sin(-x) = -\sin(x)$
 $\cos(-x) = \cos(x)$

$$\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos(-x)} d(-x) = \frac{-\sin^3(x)}{1+\cos(x)} (-dx) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)} dx$$

1 Donc on peut faire le chgt de var.

$$\begin{cases} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{cases}$$

2 Ici nous sommes dans le cas où le changement de variable n'est pas une bijection entre les bornes de l'intervalle. Autrement dit $x \mapsto \cos(x)$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:



$x \mapsto \cos(x)$ st
 Strictement croissante entre
 $-\frac{\pi}{2}$ et 0 :

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \cos(x) \leq 1$$

$x \mapsto \cos(x)$ st
 Strictement décroissante entre
 $-\frac{\pi}{2}$ et 0 :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(0) \geq \cos(x) \geq \cos(\frac{\pi}{2})$$

1

0

changement de sens
 car $x \mapsto \cos(x)$ décroissant
 sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

Donc on va séparer l'intégrale en 0.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)} dx$$

$$= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} x - \sin(x) dx$$

On sépare selon

$$= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} x - \sin(x) dx$$

$$= - \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} x - \sin(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} x - \sin(x) dx \right]$$

Plus aucun problème, on a plus qu'à remplacer!

$$= - \left[\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t} dt \right] = 0$$

Remarque: Intégrale d'une fonction impaire sur
 un intervalle $[-a, a]$ avec $a > 0$
 (appelé intervalle symétrique)
 Soit f une fonction définie au moins
 sur $[-a, a]$ et impaire ($\forall x \in [-a, a], f(x) = -f(-x)$)
 Alors: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$
 $= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0$
 chgt de variable: $\begin{cases} t = -x \\ dt = -dx \end{cases}$

L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle
 symétrique est toujours nulle.

3 $\int \frac{1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx$

On teste les 3 possibilités vue en cours.

① $\frac{1}{\sin^4(-x) + \cos^4(-x)} d(-x) = \frac{-1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx$
différent de la fonction de départ

② $\frac{1}{\sin^4(\pi-x) + \cos^4(\pi-x)} d(\pi-x) = \frac{-1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx$
différent de la fonction de départ

③ $\frac{1}{\sin^4(\pi+x) + \cos^4(\pi+x)} d(\pi+x) = \frac{1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx$
OK 😊

1 Donc on peut faire le chgt de var.

$$\begin{cases} b = \tan(x) \\ db = (1 + \tan^2(x)) dx \end{cases}$$

3 $\int \frac{1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx$

$$= \int (\sin^4(x) + \cos^4(x))^{-1} (1 + \tan^2(x))^{-1} (1 + \tan^2(x)) dx$$

$$= \int \left[\cos^4(x) \left(\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} + 1 \right) \right]^{-1} (1 + \tan^2(x))^{-1} (1 + \tan^2(x)) dx$$

$$= \int (1 + \tan^2(x))^2 \left(\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} + 1 \right)^{-1} (1 + \tan^2(x))^{-1} (1 + \tan^2(x)) dx$$

Rappel: $(\cos^2(x))^{-1} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 = 1 + \tan^2(x) (= \tan'(x))$

$$= \int (1 + \tan^2(x))^2 (\tan^4(x) + 1)^{-1} (1 + \tan^2(x))^{-1} (1 + \tan^2(x)) dx$$

$$= \int \frac{1 + \tan^2(x)}{1 + \tan^4(x)} (1 + \tan^2(x)) dx$$

→ Tout est réuni pour que le changement de variable se passe bien.

$$= \int \frac{1 + b^2}{1 + b^4} db$$

$$= \int \frac{1 + b^2}{(b^2 + \sqrt{2}b + 1)(b^2 - \sqrt{2}b + 1)} db$$

$$= \int \frac{1/2}{b^2 + \sqrt{2}b + 1} + \frac{1/2}{b^2 - \sqrt{2}b + 1} db.$$

On veut ramener les dénominateurs à $(b - \cdot)^2 + \cdot$

$$\text{or } b^2 - \sqrt{2}b + 1 = b^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} b + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1$$

$$= \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(2 \times \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left((\sqrt{2}b - 1)^2 + 1 \right)$$

$$\text{et } b^2 + \sqrt{2}b + 1 = \frac{1}{2} \left((\sqrt{2}b + 1)^2 + 1 \right)$$

$$\int \frac{1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx$$

$$= \int \frac{1/2}{1/2 [(\sqrt{2}b + 1)^2 + 1]} + \frac{1/2}{1/2 [(\sqrt{2}b - 1)^2 + 1]} db$$

$$= \int \frac{1}{(\sqrt{2}b + 1)^2 + 1} db + \int \frac{1}{(\sqrt{2}b - 1)^2 + 1} db$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \arctan(\sqrt{2}b+1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \arctan(\sqrt{2}b-1)$$

$$(4) \int \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)} dx$$

On teste les 3 possibilités vue en cours.

$$(1) \frac{\cos(-x)}{1+\sin(2(-x))} d(-x) = \frac{-\cos(x)}{1-\sin(2x)} dx$$

différent de la fonction de départ

$$(2) \frac{\cos(\pi-x)}{1+\sin(2(\pi-x))} d(\pi-x) = \frac{\cos(x)}{1-\sin(2x)} dx$$

différent de la fonction de départ

$$(3) \frac{\cos(\pi+x)}{1+\sin(2(\pi+x))} d(\pi+x) = \frac{-\cos(x)}{1+\sin(2x)} dx$$

différent de la fonction de départ

On fait alors le changement de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Rappel: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

On a alors:

$$1 + \sin(2x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x) = 1 + 2 \times \frac{1-t^2}{1+t^2} \times \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)^2 + 4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)} dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \times \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2 + 4t(1-t^2)} \times \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2 \int \frac{1-t^2}{t^4 + 2t^2 + 1 + 4t - 4t^3} dt$$

$$= 2 \int -\frac{2t}{(t^2 - 2t - 1)^2} - \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt$$

$$\text{or } t^4 + 2t^2 + 1 + 4t - 4t^3 = (t^2 - 2t - 1)^2$$

$$\text{et } t^2 - 2t - 1 = (t - 1 + \sqrt{2})(t - 1 - \sqrt{2})$$

on calcule
D. etc...

A faire
par vous
même
"Décompo. élé.
simples"

$$= 2 \int \frac{1/4\sqrt{2}}{t + \sqrt{2} - 1} + \frac{(2-\sqrt{2})/4\sqrt{2}}{(t + \sqrt{2} - 1)^2}$$

$$+ \frac{-1/4\sqrt{2}}{t - \sqrt{2} - 1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4\sqrt{2}}{t - \sqrt{2} - 1} dt$$

La suite est à faire comme l'exemple 1.

Pour vous entraîner encore :

(a) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$

(b) $\int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(2x)} dx$

(c) $\int \frac{1}{7 + \tan(x)} dx$

(d) $\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 2} dx$