

Prüfung von Algebra 2

Freitag 4 Juni 2021

Anleitungen :

Dokumente sind nicht erlaubt. Handys sollen weggelassen werden. Taschenrechner verboten!

Consignes :

Aucun document n'est autorisé. Les portables devront rester éteints. Calculatrices interdites !

ÜBUNG 1 _____ [2 Punkte]

Kursfragen : Ergänzen Sie die folgende Sätze

- ① Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $i^2 = -1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist die konjugierte Zahl $\bar{z} = \dots$
- ② Die Lösungen von $x^2 - 2ix - 2 = 0$ sind ...
- ③ Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ von Größe $n \times m$ heißt $A^t = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ die ...
- ④ Eine Matrix A ist symmetrisch wenn ...

ÜBUNG 2 _____ [9 Punkte]

Das Ziel dieser Übung ist es, das folgende linear Differentialsystem zu lösen

$$\begin{cases} f_1' &= 2f_1 & -5f_2 \\ f_2' &= f_1 & -2f_2 \end{cases} \quad (*)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$f_1(0) = 1 \quad \text{und} \quad f_2(0) = 2 \quad (1)$$

- ① Zeigen Sie, dass (*) ist äquivalent zu [0.5 Punkt]

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

wo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- ② Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie seine Nullstellen. Welche sind die Eigenwerte von A ? [1.5 Punkte]
- ③ Berechnen Sie die Eigenräume von A für jeden Eigenwert. Wählen Sie einen Eigenvektor für jeden Eigenraum. [3 Punkte]
- ④ Wir setzen [2 Punkte]

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Wechsel- oder Übergangsmatrix P an so, dass $A = PDP^{-1}$. Berechnen Sie ihre Inverse P^{-1} .

- ⑤ Lösen Sie (*) mit (1).

[2 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Lösung der folgende Form ist

$$\begin{cases} f_1(t) &= \cos(t) - 8 \sin(t) \\ f_2(t) &= 2 \cos(t) - 3 \sin(t) \end{cases} .$$

Erinnerung: Eulers Formeln

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ÜBUNG 3

[9 Punkte]

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

- ① Ist A eine Orthogonalmatrix ?

[1 Punkt]

- ② Diagonalisieren Sie die Matrix A . Bestimmen Ihre drei gewählten Eigenvektoren eine Orthonormalbasis ?

[5 Punkte]

- ③ Lösen sie die Differentialgleichung:

[2 Punkte]

$$X'(t) = A X(t) \quad \text{wo} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $X(0) = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

- ④ Prüfen Sie, dass $\begin{cases} x(0) = 12 \\ y(1/2) = -5\sqrt{e} \\ z(t) = 4 \cosh(4t) \end{cases} .$

[1 Punkt]

Erinnerung:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Übung 1:

① Wir haben

$$\begin{cases} f_1' = 2f_1 - 5f_2 \\ f_2' = f_1 - 2f_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f_1 - 5f_2 \\ f_1 - 2f_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Wir setzen $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

② Das charakteristische Polynom im x ist

$$\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 2-x & -5 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)(-2-x) + 5 = x^2 - 4 + 5 = x^2 + 1$$

③ Über $\mathbb{R}$, gibt es keine Lösung für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Also gibt es kein Eigenwert und A ist nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

Über $\mathbb{C}$, wir können das charakteristische Polynom umschreiben:

$$\det(A - xI_2) = (x - i)(x + i)$$

Also gibt es zwei Nullstellen " i " und " $-i$ ", die sind die Eigenwerte von A .

Da A ein 2×2 Matrix ist, ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

④ • Eigenvektoren für i : Sei $v_i = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ so, daß $x, y \in \mathbb{C}$. Wir lösen:

$$(A - iI_2)v_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-i)x - 5y = 0 \\ x - (2+i)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-i)x - (2-i)y - 5y = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ x = (2+i)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_i = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eig}(A, i) = \{ \lambda v_i \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$$

• Eigenvektoren für $-i$: Sei $v_{-i} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ so, daß $x, y \in \mathbb{C}$. Wir lösen:

$$(A + iI_2)v_{-i} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)x - 5y = 0 \\ x - (2-i)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)x - (2-i)y - 5y = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ x = (2-i)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{-i} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eig}(A, -i) = \{ \lambda v_{-i} \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$$

$$\textcircled{5} P = (v_i \ v_{-i}) = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Und wir wissen, daß $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t \text{co}(P)$

Wir haben $\det(P) = 2+i - 2+i = 2i$

und $\text{co}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2+i & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t \text{co}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$

Dann $P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$

⑥ $e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$ wo $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Also $e^{tA} = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (2+i)e^{it} & (2-i)e^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (2+i)(-2+i) \\ i^2 - e^2 = -1-4 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2(e^{it} - e^{-it}) + i(e^{it} + e^{-it}) & (-1-4)e^{it} + (4+1)e^{-it} \\ e^{it} - e^{-it} & -2(e^{it} - e^{-it}) + i(e^{it} + e^{-it}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} & -5 \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} & -2 \times \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \sin(t) + \cos(t) & -5 \sin(t) \\ \sin(t) & -2 \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind dann:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(t) = \cos(t) - 8 \sin(t) \\ f_2(t) = -3 \sin(t) + 2 \cos(t) \end{cases}$$

Übung 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

① Wenn A Orthogonal ist, ${}^t A = A^{-1} \Rightarrow A {}^t A = I_3$

$$\text{Aber } A {}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq I_3$$

$\Rightarrow$ A ist nicht orthogonal.

② Wir berechnen das charakteristische Polynom von A:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{z_1, -(3-\lambda)z_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 16-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(16-\lambda^2) = -(1-\lambda)(4-\lambda)(4+\lambda)$$

Es gibt also 3 verschiedene Eigenwerte für A $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

$$\begin{aligned}
\text{Wir haben: } * (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7z = 0 \\ x - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2}z \\ x = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor für } 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* (A - 4I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 7z = 0 \\ y = 0 \\ x - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 7z \end{cases} \\
\Rightarrow v_4 &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor für } 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* (A + 4I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 7z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \\
\Rightarrow v_{-4} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor für } -4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = (v_1 \ v_4 \ v_{-4}) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{co}(P) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{3} \quad \exp(tA) &= P e^{tD} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 7e^{4t} & e^{-4t} \\ e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7e^{4t} + e^{-4t} & 0 & 7e^{4t} - 7e^{-4t} \\ 0 & 8e^t & 0 \\ -e^{4t} + e^{-4t} & 0 & e^{4t} + 7e^{-4t} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{21}{2} e^{4t} + \frac{3}{2} e^{-4t} + \frac{7}{2} e^{4t} - \frac{7}{2} e^{-4t} \\ \frac{3}{2} (-e^{4t} + e^{-4t}) - 5e^t + \frac{1}{2} e^{4t} + \frac{7}{2} e^{-4t} \\ -2e^{-4t} + 14e^{4t} - 5e^t \\ \underbrace{2e^{4t} + 2e^{-4t}}_{= 4 \cosh(4t)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(0) = 14 - 2 = 12 \\ y(1/2) = -5\sqrt{e} \\ z(t) = 4 \cosh(4t) \end{cases}$$

$$\cosh(4t) = \frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2}$$

Prüfung von Algebra 2

Juni 2021

Anleitungen :

Dokumente sind nicht erlaubt. Handys sollen weggelassen werden. Taschenrechner verboten!

Consignes :

Aucun document n'est autorisé. Les portables devront rester éteints. Calculatrices interdites !

ÜBUNG 1 _____ [2 Punkte]

Kursfragen : Ergänzen Sie die folgende Sätze

- ① Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $i^2 = -1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist der Betrag $|z| = \dots$
- ② Die Lösungen von $x^2 + 4ix - 4 = 0$ sind ...
- ③ Geben Sie die inverse Matrix von

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- ④ Eine Matrix A ist hermitesch wenn ...

ÜBUNG 2 _____ [12 Punkte]

Das Ziel dieser Übung ist es, das folgende linear Differentialsystem zu lösen

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

wo

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

und mit den Anfangsbedingungen

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = -1/2 \quad \text{und} \quad f_3(0) = 1 \quad (1)$$

- ① Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie seine Nullstellen. Welche sind die Eigenwerte von A ? [3 Punkte]
- ② Berechnen Sie die Eigenräume von A für jeden Eigenwert. Wählen Sie einen Eigenvektor für jeden Eigenraum. [5 Punkte]
- ③ Wir setzen [2 Punkte]

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Wechsel- oder Übergangmatrix P an so, dass $A = PDP^{-1}$. Berechnen Sie ihre Inverse P^{-1} .

- ④ Lösen Sie (*) mit (1).
Zeigen Sie, dass

[2 Punkte]

$$f_3(t) = \cosh(5t)$$

Erinnerung:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ÜBUNG 3 _____ [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass

$$= \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 0 \\ 20 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

ÜBUNG 4 _____ [2 Punkte]

Ist jede Matrix diagonalisierbar? Wenn ja, zeigen Sie es, wenn nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel.