

Rappels sur les probabilités (prérequis - Probabilités discrètes)

1. Si A et B sont deux évènements, la formule d'addition $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ est valable ...

- ☐ (A) quelques soient A et B
- ☐ (B) seulement si A et B sont indépendants
- ☐ (C) seulement si A et B sont incompatibles

2. Du coup, la formule d'addition pour A et B deux évènements quelconques est ...

- ☐ (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ☐ (B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$
- ☐ (C) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ☐ (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

3. La formule multiplicative $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ est valable ...

- ☐ (A) quelques soient A et B
- ☐ (B) seulement si A et B sont indépendants
- ☐ (C) seulement si A et B sont incompatibles

4. On pose A^c le complémentaire d'un évènement A. La formule de la probabilité du complémentaire est :

- ☐ (A) $P(A^c) = P(A)$
- ☐ (B) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- ☐ (C) $P(A^c) = - P(A)$
- ☐ (D) $P(A^c) = 1 + P(A)$

5. Un peu de réflexion : Un évènement indépendant de son complémentaire...

- ☐ (A) est de probabilité nulle
- ☐ (B) est de probabilité 1/2
- ☐ (C) est soit de probabilité nulle, soit de probabilité 1
- ☐ (D) n'existe pas

6. Un évènement impossible est la même chose qu'un évènement de probabilité nulle.

- ☐ (V) Vrai
- ☐ (F) Faux

7. Un évènement certain est la même chose qu'un évènement de probabilité 1.

- ☐ (V) Vrai
- ☐ (F) Faux

8. Une variable aléatoire discrète est une application (fonction) :

- ☐ (A) définie sur l'ensemble des réels à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels
- ☐ (B) définie sur l'ensemble des événements à valeurs dans $\mathbb{R}$ (l'ensemble des réels)
- ☐ (C) définie sur l'ensemble des événements à valeurs dans $\mathbb{N}$
- ☐ (D) définie sur l'ensemble des réels à valeurs dans un espace discret

9. Une variable aléatoire réelle est :

- ☐ (A) définie sur l'ensemble des réels à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels
- ☐ (B) définie sur l'ensemble des événements à valeurs dans $\mathbb{R}$ (l'ensemble des réels)
- ☐ (C) définie sur l'ensemble des événements à valeurs dans un espace discret
- ☐ (D) définie sur l'ensemble des réels à valeurs dans une partie continue de $\mathbb{R}$ (l'ensemble des réels)

10. La fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X est définie, pour tout $y \in \mathbb{R}$, par :

- ☐ (A) $F(y) = P(X \leq y)$
- ☐ (B) $F(y) = P(X = y)$
- ☐ (C) $F(y) = P(y \leq X)$

11. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X . Choisissez les affirmations vraies

- ☐ (A) La limite de F en $+\infty$ est 1
- ☐ (B) F est une fonction continue
- ☐ (C) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- ☐ (D) $F(0) = 0$
- ☐ (E) F a une limite nulle en $+\infty$
- ☐ (F) F est périodique
- ☐ (G) F caractérise X

12. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X de loi uniforme $[0,1]$. On rappelle que

$$F(x) = x \quad \text{si } x \in [0,1]$$

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

$$F(x) = 1 \quad \text{si } x > 1$$

Quelle est la probabilité que $X < 1/2$

- ☐ (A) 0
- ☐ (B) $1/4$
- ☐ (C) $1/2$
- ☐ (D) $3/4$
- ☐ (E) 1

13. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X de loi uniforme $[0,1]$. On rappelle que

$$F(x) = x \quad \text{si } x \in [0,1]$$

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

$$F(x) = 1 \quad \text{si } x > 1$$

Quelle est la probabilité que $1/4 < X < 1/2$

- ☐ (A) 0
- ☐ (B) $1/4$
- ☐ (C) $1/2$
- ☐ (D) $3/4$
- ☐ (E) 1

- 14.** Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$. On "rappelle" que la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

$$F(x) = 1 - e^{(-\lambda x)} \quad \text{si } x \geq 0$$

Quelle est la probabilité que $X < 1$ (à 10^{-3})

- ☐ (A) -1.718
- ☐ (B) 0.632
- ☐ (C) 0.865
- ☐ (D) -19.085
- ☐ (E) 1

- 15.** Avez vous vu ce qu'était une fonction densité (par exemple en Terminale)?

- ☐ (A) Oui
- ☐ (B) Non

- 16.** Du coup, choisissez alors les propriétés qui sont vérifiées par la fonction de densité

- ☐ (A) Elle tend vers 0 en $+\infty$
- ☐ (B) Elle est paire
- ☐ (C) Elle est de masse 1 (Son intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ est 1)
- ☐ (D) Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$
- ☐ (E) Elle définit une fonction de répartition de manière unique

①

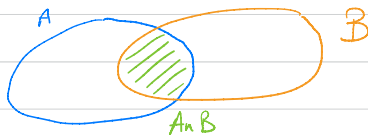


A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

②

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



③

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

④

 Ω

Notations:

 $\overline{A}$ A^c $G_{\Omega}(A)$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A^c) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

$\downarrow$
car $\Omega \supset A$

Exemple: On lance un dé et on regarde le résultat:
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$A = \{1, 3, 5\} \rightarrow A^c = \{2, 4, 6\}$$

⑤

$$A \perp\!\!\!\perp A^c \quad (A \text{ et } A^c \text{ indépendants})$$

$$A \cap A^c = \emptyset \quad P(A \cap A^c) = P(A)P(A^c)$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = P(A)(1 - P(A))$$

$$\Rightarrow 0 = P(A)(1 - P(A))$$

$$\Rightarrow P(A) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - P(A) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{P(A) = 0} \quad \text{ou} \quad \underline{P(A) = 1}$$

⑥

On prend une pièce de monnaie et on la lance indéfiniment.

Proba que l'on fasse toujours pile.

sur 1 lancer: $\frac{1}{2}$

sur 2 lancers: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

sur n lancers: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

en l'infini: 0

- ⑦ Il existe des événements A tels que $P(A) = 1$ mais A n'est pas certain.

Exemple: ne pas faire réussir à faire pile indéfiniment.

- ⑧ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ = v.a. discrète.

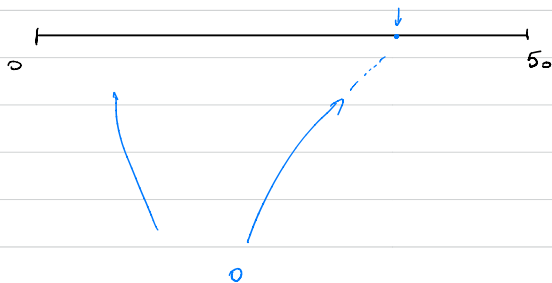
Exemple: - lancer de dé

- $\text{Bin}(n, p) \rightarrow 0, \dots, n$

- $\text{Poisson}(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda) \rightarrow \mathbb{N}$

- ⑨ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

X peut prendre des valeurs sur $[0, 1]$.



- ⑩ X a une loi déterminée par sa fonction de répartition.

$$F(y) = P(X \leq y)$$

- ⑪ $F(0) = 0$: contreexemple.

X renvoie l'opposé du nombre qui apparaît sur un lancer de dé.

F_X ne caractérise que la loi de X .

- ⑫ ⑬ ⑭ A faire

Loi normale

1. Pourquoi on étudie la loi normale?

- ☐ (A) Parce qu'elle est facile
- ☐ (B) Parce qu'elle est sympa
- ☐ (C) Parce que c'est ce que veut l'enseignant
- ☐ (D) Parce que c'est la plus utilisée pour modéliser les phénomènes naturels

2. La gaussienne, ou la densité de la loi normale est en forme de :

- ☐ (A) cloche
- ☐ (B) ballon
- ☐ (C) carré

3. Pourquoi se ramène t on toujours à la loi normale centrée réduite?

- ☐ (A) C'est toujours plus facile d'en étudier qu'une seule..
- ☐ (B) Sa fonction de densité est paire et donc donne des symétries qui facilite l'étude de la loi.
- ☐ (C) Sa fonction de répartition est constante, donc plus simple.
- ☐ (D) Elle a une variance nulle

4. D'ailleurs comment on se ramène à une loi normale centrée réduite? Si X suit une loi $N(m, s^2)$, quelle variable aléatoire suit une loi normale centrée réduite?

- ☐ (A) $X - s/m$
- ☐ (B) $(X - m)/s$
- ☐ (C) $X/s - m$
- ☐ (D) $(X - m)^2 / s$
- ☐ (E) $(X - m)/s^2$

5. X suit une loi normale centrée réduite. Alors $P(X \leq 2,14) = \dots$

- ☐ (A) 0,9838
- ☐ (B) 0,9115
- ☐ (C) 0,9222

6. X suit une loi normale centrée réduite. Alors $P(X \geq -1,07) = \dots$

- (A)** 0,8577
- (B)** 0,8264
- (C)** 0,2345
- (D)** 0,1423

7. X suit une loi normale $N(0,5 ; 4)$. Alors $P(X \leq 1) = \dots$

8. X suit une loi normale $N(0,5 ; 4)$. Alors $P(-1 \leq X \leq 1) = \dots$

9. Donnez un encadrement du quantile $\alpha = 95\%$ pour la loi normale centrée réduite de la forme $[2.4, 3.2]$

10. Choisissez alors une valeur approchée en faisant la méthode de l'extrapolation linéaire.

11. Donnez un encadrement (de la forme $[2.4, 3.2]$) du quantile $\alpha = 95\%$ pour la loi normale $N(2, 4)$.

12. Choisissez alors une valeur approchée en faisant la méthode de l'extrapolation linéaire.

① ② OK.

③ ① ③ vraies.

④ $X \sim N(\square, \Delta)$

Alors $\frac{X - \square}{\sqrt{\Delta}} \sim N(0, 1)$

③

→ Par exemple: $X \sim N(3, 5)$

Alors $\frac{X - 3}{\sqrt{5}} \sim N(0, 1)$

⑤ ① vraie.

⑥ $P(X \geq -1,07)$
 $= P(X \leq 1,07)$
 $= 0,8577$



(Lecture dans la
table de la
loi $N(0, 1)$)

⑥ $X \sim N(0,5; 4)$

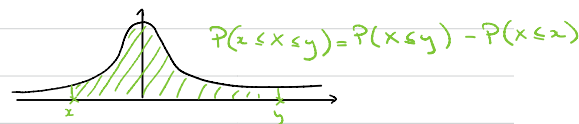
$$\Rightarrow \frac{X - 0,5}{\sqrt{4}} \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq 1) = P\left(\frac{X - 1/2}{2} \leq \frac{1 - 1/2}{2}\right)$$

$\sim N(0, 1)$ ←

$$= P\left(\frac{X - 1/2}{2} \leq 0,25\right)$$

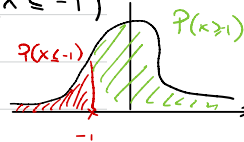
$$= 0,5987$$



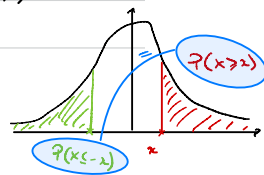
⑦

$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1)$$

$$\text{Or } P(X \leq -1) = 1 - P(X \geq -1)$$
$$= 1 - P(X \leq -(-1))$$
$$= 1 - P(X \leq 1)$$



$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - (1 - P(X \leq 1))$$
$$= 2P(X \leq 1) - 1 = \dots$$



⑧ $P(X \leq x) = 0,95$

$\Rightarrow \underline{1,64 \leq z \leq 1,65}$

9

11

Exemple
fait

10

$X \sim N(2, 4)$

Donc $\frac{X-2}{\sqrt{4}} \sim N(0, 1)$

$P(X \leq x) = 95\% = 0,95$

$P\left(\frac{X-2}{\sqrt{4}} \leq \frac{x-2}{\sqrt{4}}\right) = 0,95$

$\overset{z}{N(0,1)} = z_{0,95} \in [1,64; 1,65]$

↓
Table loi
normale

Donc $1,64 \leq z_{0,95} \leq 1,65$

$\frac{x-2}{2}$

$3,28 \leq x-2 \leq 3,3$

$\underline{5,28 \leq x \leq 5,3}$

11

$x \approx \underline{5,29}$

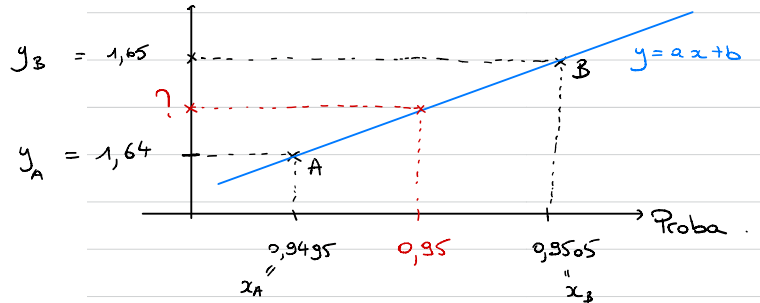
↓
Après extrapolation linéaire

Extrapolation linéaire

Extrapolation $\cong$ Exagération

But: Calculer une valeur approchée d'une proba, mieux qu'un arrondissement brut:

Ex: $P(X \leq 1,64) = 0,9495$
 $P(X \leq 1,65) = 0,9505$



$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{1,65 - 1,64}{0,9505 - 0,9495} = \frac{0,01}{0,001} = \underline{\underline{10}}$$

La droite d'extrapolation a pour équation

$$y = 10x + b$$

On remplace B dans l'équation:

$$y_B = 10x_B + b$$

$$\Rightarrow 1,65 = 10 \times 0,9505 + b$$

$$\Rightarrow 1,65 - 9,505 = b$$

$$\text{Donc } b = -7,855$$

Donc

$$y = 10x - 7,855$$

$$\begin{aligned} y &= 10 \times 0,95 - 7,855 \\ &= 9,5 - 7,855 \\ &= \underline{\underline{1,645}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(X \leq 1,645) \approx 0,95}}$$

Lois associées à la loi normale

1. Qu'est qu'une loi de Khi-deux à k degrés de liberté?

- ☐ (A) la somme des carrés de k loi normales centrées réduites indépendantes
- ☐ (B) le carré d'une loi normale centrée réduite divisé par k
- ☐ (C) le produit de k loi normales centrées réduites

2. Soit $X \sim \chi^2(k)$. Plus k grandi, plus la fonction de densité est concentré vers 0.

- ☐ (V) Vrai
- ☐ (F) Faux

3. La fonction de densité du Khi-deux est paire.

- ☐ (V) Vrai
- ☐ (F) Faux

4. Soit $X \sim \chi^2(7)$. Calculez $P(X \leq 1.239)$

- ☐ (A) 0.99
- ☐ (B) 0.995
- ☐ (C) 0.01
- ☐ (D) 0.005

5. Soit $X \sim \chi^2(3)$. Donnez le quantile d'ordre $\alpha = 95\%$

- ☐ (A) 7.8147
- ☐ (B) 0.3518
- ☐ (C) 0.7107
- ☐ (D) 0.0717

6. La fonction de densité de la loi de Student est :

- ☐ (A) paire
- ☐ (B) impaire
- ☐ (C) périodique
- ☐ (D) quelconque

7. Soit $X \sim t(7)$. Calculez $P(|X| \geq 3)$ (valeur approchée).

- ☐ (A) 0.005
- ☐ (B) 0.01
- ☐ (C) 0.75
- ☐ (D) 0.35
- ☐ (E) 0.9
- ☐ (F) 0.995

8. Soit $X \sim t(5)$. Donnez le quantile d'ordre $\alpha = 10\%$.

- ☐ (A) 1.476
- ☐ (B) 0.920
- ☐ (C) - 0.920
- ☐ (D) -1.476

$$\textcircled{4} \quad P(X \leq 1,239)$$

$$= 1 - P(X \geq 1,239)$$

$$= 1 - 0,99 = 0,01$$

$$\textcircled{5} \quad P(X \leq x) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X \geq x) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq x) = 0,05$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 7,8147}$$

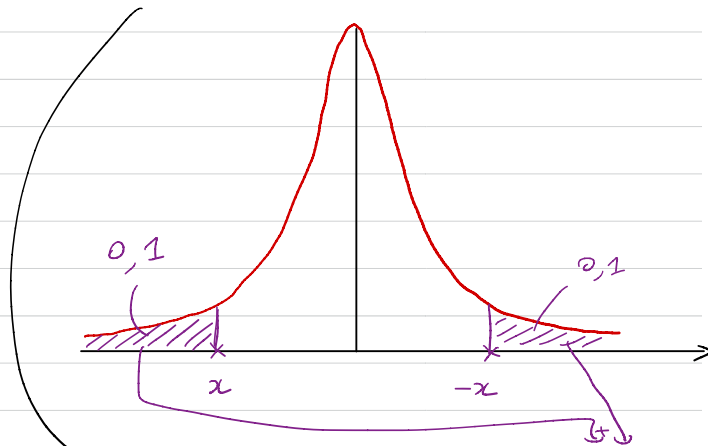
↳ lecture dans la table.

$$\textcircled{7} \quad \text{Lecture dans la table}$$

$$P(|X| > 3) \approx P(|X| > 2,998)$$

$$= 0,01$$

$$\textcircled{8} \quad P(X \leq x) = 0,1$$



$$\Leftrightarrow P(|X| > -x) = 0,2$$

car la fonction de densité est paire.

Lecture dans la table

$$-x = 0,920.$$

$$\text{Donc } \underline{x = -0,920.}$$

Rappel: On dit que x le quantile d'ordre α si $P(X \leq x) = \alpha$

① Réponse (A). Voir la définition dans le cours

② Faux.

⑥ Réponse (A). Elle est seulement paire. En fait, elle ressemble beaucoup à une loi normale centrée réduite. D'ailleurs:

$$t(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

Intervalles de confiance (2021)

1.

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \right)$$

$E(X)$

$X_i \perp X_j, i \neq j$

$\text{loi}(X_i) = \text{loi}(X)$

$\forall i = 1, \dots, n$

$\sqrt{V(X)}$

Le théorème de la limite centrée indique que cette variable aléatoire ...

- ☒ (A) converge en loi vers une loi $N(0,1)$
- ☐ (B) converge en loi vers une loi $N(0, \sigma)$
- ☐ (C) admet un intervalle de confiance
- ☐ (D) converge vers 0

2. La moyenne empirique d'une suite (X_n) de variables aléatoires est ...

- ☒ (A) la moyenne des n premiers termes
- ☐ (B) la moyenne des n premiers termes moins n
- ☐ (C) la somme des n premiers termes
- ☐ (D) la limite de (X_n)

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$

3.

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Montrez ce résultat. Mêmes hypothèses que le TLC

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \right) &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sqrt{n} \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m}{\sigma} \right) &= \sqrt{n} \left(\frac{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i - m \times n \right)}{\sigma} \right) = \frac{1}{n} \times \sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{\sigma} \end{aligned}$$

Handwritten notes and diagrams:

- Diagram showing the expansion of the sum: $(X_1 - m) + (X_2 - m) + (X_3 - m) + \dots + (X_n - m)$
- Diagram showing the sum of X_i terms: $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ with $-m$ repeated n times below it.
- Diagram showing the simplification of the expression: $\frac{1}{n} \times \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

↔ niveau de risque de 5%

4. Un intervalle de confiance d'un paramètre Theta de niveau de sureté 95% est ...
- (A) Un intervalle ou l'on est sûr de trouver Theta
 - (B) Un intervalle ou l'on est sûr que Theta n'y sera pas
 - (C) Un intervalle ou l'on est presque sûr, avec une probabilité de 95%, de trouver Theta
 - (D) Un intervalle ou l'on est presque sûr, avec une probabilité de 95%, que Theta n'y sera pas
5. Pour une loi donnée :
- (A) une infinité d'intervalles de confiance de niveau 5%
 - (B) un seul intervalle de confiance de niveau 5%
6. Quel est l'intervalle de confiance du paramètre m d'une loi de normale $N(m,1)$ à 100%?
- (A) R
 - (B) $[m-1, m+1]$
 - (C) le point m
7. Estimer la variance σ^2 d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(3, \sigma^2)$. On a à notre disposition un échantillon de taille $n = 200$ de variables aléatoires iid de même loi que X . On sait d'autre part que la variance de cet échantillon est 25. On considère un niveau de risque $\alpha = 5\%$.
8. Estimer la variance σ^2 d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. On a à notre disposition un échantillon de taille $n = 200$ de variables aléatoires iid de même loi que X . On sait d'autre part que la moyenne de cet échantillon est 4. On considère un niveau de risque $\alpha = 1\%$.

9.

$$\bar{x}_n = 3 \quad s_n^2 = 3,2$$

Soit X une V.A. de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon issu de la loi X . Construire un intervalle de confiance de niveau $\alpha = 5\%$ pour θ dans le cas où on a observé les résultats ci contre. Ici $n=100$.

On rappelle que l'on peut remplacer θ par son estimateur pour simplifier les calculs.