

Intervalles de confiance bilatéraux
pour les paramètres d'une loi normale
 $N(\mu, \sigma^2)$

μ , se lit "mu".
 σ , se lit "sigma".

Cas 1: Estimation de μ avec σ^2 connu

Estimateurs

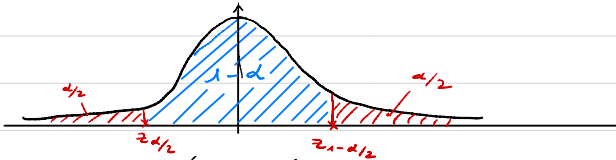
nécessaires:

Moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Formule magique:

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \sim N(0, 1)$$



$$\text{Donc } P(z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$= -z_{1-\alpha/2}$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Donc on obtient un intervalle de confiance pour μ , en connaissant σ et une réalisation de $\bar{X}_n$ pour n donné.

Ex: Soit $X \sim N(\mu, 4)$. On cherche à estimer μ . On se donne un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$. On réalise une expérience sur une population de $n = 100$ individus qui nous donne une moyenne $\bar{x}_n = 2,5$. On rappelle qu'un n -échantillon $X_1, \dots, X_n$ est par définition composé de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On se donne un niveau de risque de $\alpha = 2\%$.

D'après le cours, on sait que

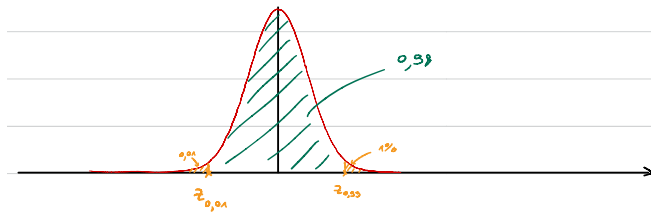
$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \sim N(0, 1)$$

Donc ici

$$\sqrt{100} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{4}} \right) = 5 \left(\bar{X}_n - \mu \right) \sim N(0, 1)$$

Comme cette v.a. suit une loi normale centrée réduite on trouve ses quantiles dans la table.

$$P(z_{0,01} \leq 5(\bar{X} - \mu) \leq z_{0,99}) = 0,98 = 1 - 2\%$$



D'après les propriétés (de symétrie) de la fonction de densité de la loi $N(0,1)$

$$z_{0,01} = -z_{0,99}$$

Il nous suffit donc de calculer $z_{0,99}$:

Dans la table :

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7290	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9779	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925

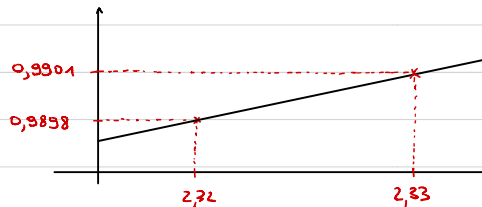
$$2,32 \leq z_{0,99} \leq 2,33$$

Si rien n'est demandé dans l'énoncé, on peut arrondir par dichotomie (en "coupant" au milieu)

$$2,325$$

mais on peut vous demander une extrapolation linéaire.

Faisons une extrapolation linéaire :



On considère que la courbe de la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$ est une droite entre 2,32 et 2,33. On calcule son coeff directeur

$$a = \frac{0,9901 - 0,9898}{2,33 - 2,32} = \frac{0,0003}{0,01} = 0,03$$

Donc cette droite a pour équation

$$y = 0,03 x + b \quad \text{où } b \in \mathbb{R} \text{ est l'ordonnée à l'origine.}$$

Or le point $(2,32; 0,9898)$ appartient à cette droite. Donc

$$0,9898 = 0,03 \times 2,32 + b$$

$$\Leftrightarrow b = 0,9898 - 0,0696 = 0,9202$$

Donc la droite d'extrapolation a pour équation

$$y = 0,03x + 0,9202$$

Or on cherche le quantile de 99% = 0,99. En remplaçant y par 0,99, on a

$$0,99 = 0,003x + 0,9202$$

$$\Leftrightarrow 0,0698 = 0,03x$$

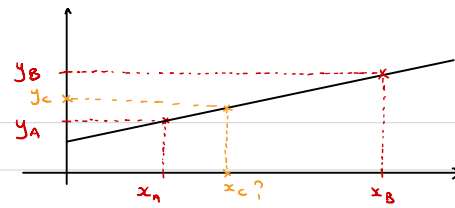
$$\Leftrightarrow x = \frac{0,0698}{0,03} = \frac{6,98}{3} \approx \underline{2,327}$$

Donc $z_{0,99} \approx 2,327$

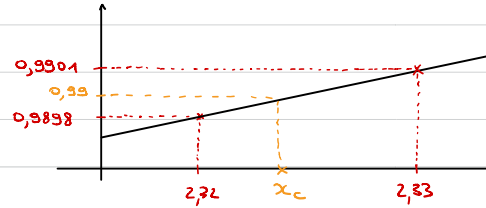
Autre méthode: On retient la formule

$$\frac{x_c - x_A}{y_c - y_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

où x_c est le quantile recherché pour la proba y_c



Donc ici



Donc la formule donne:

$$\frac{x_c - 2,32}{0,99 - 0,9898} = \frac{2,33 - 2,32}{0,9901 - 0,9898}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_c - 2,32}{0,0002} = \frac{0,01}{0,0003}$$

$$\Leftrightarrow x_c - 2,32 = \frac{0,01}{0,0003} \times 0,0002$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_c \approx 2,32 + 0,007 = 2,327}$$

Revenons à

$$\mathbb{P}(z_{0,1} \leq 5(\bar{X}_n - \mu) \leq z_{0,99}) = 0,98 = 1 - 2\%$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(-2,327 \leq 5(\bar{X}_n - \mu) \leq 2,327) = 0,98$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-2,327}{5} \leq \bar{X}_n - \mu \leq \frac{2,327}{5}\right) = 0,98$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-2,327}{5} - \bar{X}_n \leq -\mu \leq \frac{2,327}{5} - \bar{X}_n\right) = 0,98$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{2,327}{5} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{2,327}{5}\right) = 0,98$$

Donc l'intervalle de confiance se calcule à partir de la réalisation de l'échantillon $\bar{x}_n = 2,5$

$$\begin{aligned} IC &= \left[\bar{x}_n - \frac{2,327}{5} ; \bar{x}_n + \frac{2,327}{5} \right] \\ &= \left[2,5 - \frac{2,327}{5} ; 2,5 + \frac{2,327}{5} \right] \\ &= \left[2,0346 ; 2,9654 \right] \end{aligned}$$

Donc l'intervalle de confiance pour μ au niveau de sécurité de 98% est

$$[2,0346 ; 2,9654]$$

Cas 2: Estimation de μ avec σ^2 inconnu

Estimateurs

nécessaires:

moyenne empirique

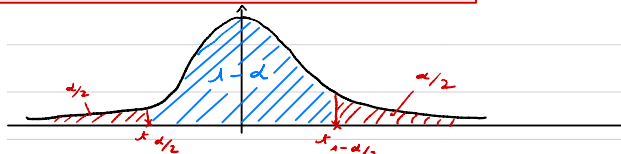
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Variance empirique corrigée

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Formule magique:

$$\frac{\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1)$$



Donc $P(t_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}} \leq t_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$= -t_{1-\alpha/2}$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}_n - \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Donc on obtient un intervalle de confiance pour μ , en connaissant une réalisation de $\bar{X}_n$ et de $\sqrt{S_n^2}$ pour n donné.

Attention: La table de la loi Student donne $P(|X| > x) = 0$

Ex: Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. On cherche à estimer μ . On se donne un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$. On réalise une expérience sur une population de $n=20$ individus qui nous donne une moyenne $\bar{x}_n = 2$ et une réalisation de la variance empirique corrigée $S_n^2 = 4$. On se donne un niveau de risque de $\alpha = 5\%$. D'après le cours, on sait que

$$\sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1)$$

où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_n - X_i)^2$

Donc $P\left(\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}\right| \geq \underline{S_{0,05}^{n-1}}\right) = 0,05$

⚠ Ceci n'est pas le quantile mais la valeur donnée dans la table pour 0,05

k/p	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
1	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314
2	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,924
3	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353
4	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,32
5	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,145
6	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943
7	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895
8	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860
9	0,398	0,543	0,703	0,885	1,100	1,383	1,833
10	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812
11	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796
12	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782
13	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771
14	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761
15	0,393	0,536	0,691	0,866	1,072	1,341	1,753
16	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746
17	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740
18	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,736
19	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,729
20	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725

$n-1 =$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-1,729 \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}} \leq 1,729\right) = 0,95$$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{1,729}{\sqrt{20}} \times \sqrt{4} \leq \bar{X}_n - \mu \leq \frac{1,729}{\sqrt{20}} \times \sqrt{4}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}} - \bar{X}_n \leq -\mu \leq \frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}} - \bar{X}_n\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}} + \bar{X}_n \geq \mu \geq -\frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}} + \bar{X}_n\right)$$

chgt de signes
car on multiplie par -1

Donc l'intervalle de confiance se calcule à partir de la réalisation de l'échantillon $\bar{x}_n = 2$

$$\begin{aligned} IC &= \left[\bar{x}_n - \frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}}; \bar{x}_n + \frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}} \right] \\ &= \left[2 - \frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}}; 2 + \frac{1,729 \times 2}{\sqrt{20}} \right] \\ &= \left[1,23; 2,77 \right] \end{aligned}$$

Donc l'intervalle de confiance pour μ au niveau de sécurité de 95% est

$$\underline{[1,23; 2,77]}$$

Cas 3: Estimation de σ^2 avec μ connu

Estimateurs

nécessaires:

Varianse empirique

$$S_n^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

↳ C'est juste la formule de la variance avec des variables aléatoires.

Formule magique:

$$n \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \text{ d'après la définition de } \chi^2(n)$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq n \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{n S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n S_n^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

Donc on obtient un intervalle de confiance pour σ^2 , en connaissant une réalisation de S_n^{*2} pour n donné.

Ex: Soit $X \sim N(2, \sigma^2)$. On cherche à estimer σ^2 . On se donne un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$. On réalise une expérience sur une population de $n=30$ individus qui nous donne un écart type $\sigma = 2$. On se donne un niveau de risque de $\alpha = 1\%$

D'après le cours, on sait que

$$n \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

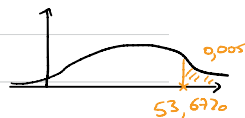
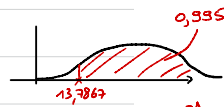
Donc

$$\mathbb{P}(13,7867 \leq n \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2}) = 0,995$$

$$\mathbb{P}(53,6720 \leq n \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2}) = 0,005 = \frac{\alpha}{2}$$

Donc

$$\mathbb{P}(13,7867 \leq n \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2} \leq 53,6720) = 0,99$$



p	0.999	0.995	0.99	0.98	0.95	0.9	0.8	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
ddl														
1	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0039	0.0158	0.0642	1.6424	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	0.0020	0.0100	0.0201	0.0404	0.1026	0.2107	0.4463	3.2189	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	0.0243	0.0717	0.1148	0.1848	0.3518	0.5844	1.0052	4.6416	6.2514	7.8147	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	0.0908	0.1070	0.2971	0.4294	0.7107	1.0636	1.6488	5.9886	7.7794	9.4827	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	0.2102	0.1117	0.5543	0.7519	1.1455	1.6103	2.3425	7.2893	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	0.3811	0.4757	0.8721	1.1344	1.6354	2.2041	3.0701	8.5581	10.6446	12.5916	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	0.5985	0.8893	1.2390	1.5643	2.1673	2.8331	3.8223	9.8032	12.0170	14.0671	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	0.8571	1.1444	1.6465	2.0325	2.7326	3.4895	4.5936	11.0301	13.3616	15.5073	18.1682	20.0902	21.9550	26.1245
9	1.1519	1.3449	2.0879	2.5324	3.3251	4.1682	5.3801	12.2421	14.6837	16.9190	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.0591	3.9403	4.8652	6.1791	13.4420	15.9872	18.3070	21.1608	23.2093	25.1882	29.5883
11	1.8339	2.4032	3.0535	3.6087	4.5748	5.5778	6.9887	14.6314	17.2750	19.6751	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	2.2142	3.1738	3.5706	4.1783	5.2260	6.3038	7.8073	15.8120	18.5493	21.0261	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
13	2.6172	3.1650	4.1069	4.7654	5.8919	7.0415	8.6339	16.9848	19.8119	22.3620	25.4715	27.6882	29.8195	34.5282
14	3.0407	4.7474	4.6604	5.3682	6.5706	7.7895	9.4673	18.1508	21.0641	23.6848	26.8728	29.1412	31.3193	36.1233
15	3.4827	4.4009	5.2293	5.9849	7.2609	8.5468	10.3070	19.3107	22.3071	24.9958	28.2595	30.5779	32.8013	37.6973
16	3.9416	5.422	5.8122	6.6142	7.9616	9.3122	11.1521	20.4651	23.5418	26.2962	29.6332	31.9999	34.2672	39.2524
17	4.4161	5.4972	6.4078	7.2550	8.6718	10.0852	12.0023	21.6146	24.7690	27.5871	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
18	4.9048	6.648	7.0149	7.9062	9.3905	10.8649	12.8570	22.7595	25.9894	28.8693	32.3462	34.8053	37.1565	42.3124
19	5.4068	6.4440	7.6327	8.5670	10.1170	11.6509	13.7158	23.9004	27.2036	30.1435	33.6874	36.1909	38.5823	43.8202
20	5.9210	7.338	8.2604	9.2367	10.8508	12.4426	14.5784	25.0375	28.4120	31.4104	35.0196	37.5662	39.9968	45.3147
21	6.4467	8.337	8.8972	9.9146	11.5913	13.2396	15.4446	26.1711	29.6151	32.6706	36.3434	38.9322	41.4011	46.7970
22	6.9830	8.427	9.5425	10.6000	12.3380	14.0415	16.3140	27.3015	30.8133	33.9244	37.6595	40.2894	42.7957	48.2679
23	7.5292	9.604	10.1957	11.2926	13.0905	14.8480	17.1865	28.4288	32.0069	35.1725	38.9683	41.6384	44.1813	49.7282
24	8.0849	9.862	10.8564	11.9918	13.8484	15.6587	18.0618	29.5533	33.1962	36.4150	40.2704	42.9798	45.5885	51.1786
25	8.6493	10.197	11.5240	12.6973	14.6114	16.4734	18.9398	30.6752	34.3816	37.6525	41.5661	44.3141	46.9279	52.6197
26	9.2221	11.602	12.1981	13.4086	15.3792	17.2919	19.8202	31.7946	35.5632	38.8851	42.8558	45.6417	48.2899	54.0520
27	9.8028	11.076	12.8785	14.1254	16.1514	18.1139	20.7030	32.9117	36.7412	40.1133	44.1400	46.9629	49.6449	55.4760
28	10.3909	12.613	13.5647	14.8475	16.9279	18.9392	21.5880	34.0266	37.9159	41.3371	45.4188	48.2782	50.9934	56.8923
29	10.9861	13.211	14.2565	15.5745	17.7084	19.7677	22.4751	35.1394	39.0875	42.5570	46.6927	49.5879	52.3556	58.3012
30	11.5883	13.7867	14.9535	16.3062	18.4927	20.5992	23.3641	36.2502	40.2560	43.7330	47.9618	50.8922	53.6720	59.7031

n=30

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{13,7867}{S_n^{*2} \times n} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{53,6770}{S_n^{*2} \times n}\right) = 0,99$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{S_n^{*2} \times n}{13,7867} \geq \sigma^2 \geq \frac{S_n^{*2} \times n}{53,6770}\right) = 0,99$$

On change le sens des signes car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc l'intervalle de confiance se calcule à partir de la réalisation de l'échantillon $\sigma = 2$

Donc $\sigma^2 = \sigma^{*2} = 4$ et $n=30$

$$IC = \left[\frac{\sigma_n^{*2} \times n}{53,6770} ; \frac{\sigma_n^{*2} \times n}{13,7867} \right]$$

le plus petit en premier

$$= \left[\frac{4 \times 30}{53,6770} ; \frac{4 \times 30}{13,7867} \right]$$

$$= [2,2358 ; 8,7040]$$

Rappel: S_n^{*2} est une variable aléatoire
 σ_n^{*2} est un nombre qui est la réalisation dans cet échantillon.

Donc l'intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de sécurité de 99% est $[2,2358 ; 8,7040]$

Cas 4 : Estimation de σ^2 avec μ inconnu

Estimateurs
nécessaires :

Variance empirique corrigée

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

→ Δ Ici ce n'est pas $\frac{1}{n}$
mais $\frac{1}{n-1}$

Formule magique.

$$\frac{(n-1) S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{d'après la définition d'une loi du } \chi^2$$

Donc $\mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \leq n \frac{S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

Attention: les quantiles pour une χ^2 à $n-1$ degré de liberté!

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{(n-1) S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

Donc on obtient un intervalle de confiance pour σ^2 , en connaissant une réalisation de S_n^2 pour n donné.

Ex: Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. On cherche à estimer σ^2 . On se donne un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$. On réalise une expérience sur une population de $n=30$ individus qui nous donne un écart type $\sigma = 2$. On se donne un niveau de risque de $\alpha = 2\%$.

D'après le cours, on sait que

$$(n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(14,2565 \leq (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \leq 49,5879\right) = 0,99 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,02}{2} = 1 - 0,01$$

$$\mathbb{P}\left(49,5879 \leq (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \leq 14,2565\right) = 0,01 = \frac{\alpha}{2}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(14,2565 \leq (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \leq 49,5879\right) = 0,98 = 1 - \alpha$$

p	0.999	0.995	0.99	0.98	0.95	0.9	0.8	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
ddl														
1	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0039	0.0158	0.0642	1.6424	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	0.0020	0.0100	0.0201	0.0404	0.1026	0.2107	0.4463	3.2189	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	0.0243	0.0717	0.1448	0.1848	0.3518	0.5844	1.0052	4.6416	6.2514	7.8147	9.8374	11.449	12.8382	16.2662
4	0.0908	0.2070	0.3711	0.4294	0.7107	1.0636	1.6488	5.9886	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	0.2102	0.4117	0.5543	0.7519	1.1455	1.6103	2.3425	7.2893	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	0.3811	0.6757	0.8721	1.1344	1.6354	2.2041	3.0701	8.5581	10.6446	12.5916	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	0.5985	0.9893	1.2390	1.5643	2.1673	2.8331	3.8223	9.8032	12.0170	14.0671	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	0.8571	1.3444	1.6465	2.0325	2.7326	3.4895	4.5936	11.0301	13.3616	15.5073	18.1682	20.8902	21.9550	26.1245
9	1.1519	1.7349	2.0879	2.5324	3.2521	4.1682	5.3801	12.2421	14.6837	16.9190	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.0591	3.9403	4.8652	6.1791	13.4420	15.9872	18.3070	21.1608	23.093	25.1882	29.5883
11	1.8339	2.6032	3.0535	3.6087	4.5748	5.5778	6.9887	14.6314	17.2750	19.6751	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	2.2142	3.0738	3.5706	4.1783	5.2260	6.3038	7.8073	15.8120	18.5493	21.0261	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
13	2.6172	3.5650	4.069	4.7654	5.8919	7.0415	8.6339	16.9848	19.8119	22.3620	25.4715	27.6882	29.8195	34.5282
14	3.0407	4.0747	4.6004	5.3682	6.5706	7.7895	9.4673	18.1508	21.0641	23.6848	26.8728	29.412	31.3193	36.1233
15	3.4827	4.6009	5.2293	5.9849	7.2609	8.5468	10.3070	19.3107	22.3071	24.9958	28.2595	30.7779	32.8013	37.6973
16	3.9416	5.1422	5.8122	6.6142	7.9616	9.3122	11.1521	20.4651	23.5418	26.2962	29.6332	31.9999	34.2672	39.2524
17	4.4161	5.6972	6.4078	7.2550	8.6718	10.0852	12.0023	21.6146	24.7690	27.5871	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
18	4.9048	6.2648	7.0149	7.9062	9.3905	10.8649	12.8570	22.7595	25.9894	28.8693	32.3462	34.4053	37.1565	42.3124
19	5.4068	6.8440	7.6327	8.5670	10.1170	11.6509	13.7158	23.9004	27.2036	30.1435	33.6874	36.1909	38.5823	43.8202
20	5.9210	7.4338	8.2604	9.2367	10.8508	12.4426	14.5784	25.0375	28.4120	31.4104	35.0196	37.6662	39.9968	45.3147
21	6.4467	8.0337	8.8972	9.9146	11.5913	13.2396	15.4446	26.1711	29.6151	32.6706	36.3434	38.8322	41.4011	46.7970
22	6.9830	8.6427	9.5225	10.6000	12.3380	14.0415	16.3140	27.3015	30.8133	33.9244	37.6595	40.894	42.7957	48.2679
23	7.5292	9.2604	10.157	11.2926	13.0905	14.8480	17.1865	28.4288	32.0069	35.1725	38.9683	41.6384	44.1813	49.7282
24	8.0849	9.8862	10.8564	11.9918	13.8484	15.6587	18.0618	29.5533	33.1962	36.4150	40.2704	42.8798	45.5885	51.1786
25	8.6493	10.5197	11.5240	12.6973	14.6114	16.4734	18.9398	30.6752	34.3816	37.6525	41.5661	44.1141	46.9279	52.6197
26	9.2221	11.1602	12.1981	13.4086	15.3792	17.2919	19.8202	31.7946	35.5632	38.8851	42.8558	45.4417	48.2899	54.0520
27	9.8028	11.8076	12.8785	14.1254	16.1514	18.1139	20.7030	32.9117	36.7412	40.1133	44.1400	46.7629	49.6449	55.4760
28	10.3909	12.4613	13.6447	14.8475	16.9279	18.9392	21.5880	34.0266	37.9159	41.3371	45.4188	48.2782	50.9934	56.8923
29	10.9861	13.1213	14.2565	15.5745	17.7084	19.7677	22.4751	35.1294	39.0874	42.5570	46.6929	49.5879	52.3356	58.3012
30	11.5880	13.7867	14.9335	16.3062	18.4927	20.5992	23.3641	36.2502	40.2560	43.7730	47.9618	50.8922	53.6720	59.7031

n=30 => n-1=29

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{14,2565}{S_n^2 \times (n-1)} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{49,5879}{S_n^2 \times (n-1)}\right) = 0,99$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{S_n^2 \times (n-1)}{14,2565} \geq \sigma^2 \geq \frac{S_n^2 \times (n-1)}{49,5879}\right) = 0,99$$

On change le sens des signes car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc l'intervalle de confiance se calcule à partir de la réalisation de l'échantillon $\sigma = 2$

Donc $\sigma^2 = \sigma_n^{*2} = 4$ et $n=30$

Donc $\sigma_n^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_n^{*2} = \frac{30}{29} \times 4 = \frac{120}{29}$

IC = $\left[\frac{\sigma_n^2 \times (n-1)}{49,5879} ; \frac{\sigma_n^2 \times (n-1)}{14,2565} \right]$

le plus petit en premier = $\left[\frac{120}{49,5879} ; \frac{120}{14,2565} \right]$

= $[2,4193 ; 8,4172]$

Donc l'intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de sécurité de 98% est $[2,4193 ; 8,4172]$

Exercice utilisant le TLC pour les intervalles de confiance:

Soit X une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$
et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon issu de la
loi de X .

On rappelle que $E(X) = \theta$ et $V(X) = \theta$
pour une loi de Poisson

- (1) Énoncez le TLC
- (2) Donnez un estimateur de l'espérance $E(X)$
- (3) Dans la formule de (1), remplacez la
variance $V(X)$ par un estimateur
de $V(X)$ grâce à (2)
- (4) Conclure d'un intervalle de confiance de
niveau de risque $\alpha = 10\%$, pour θ .
On a, après expérience, un échantillon
de taille $n = 100$ qui admet une
moyenne $\bar{x}_n = 5$.

(1) Dans le contexte de l'exercice

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}} \right) \quad \text{où } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

(2) L'espérance d'une variable aléatoire est sa
"moyenne". On a vu dans le cours que
la moyenne empirique $\bar{X}_n$ est un
estimateur de la moyenne $E(X) = \theta$.

$$(3) \quad V(X) = \theta = E(X)$$

Donc d'après (2) on peut l'estimer
grâce à $\bar{X}_n$.

On obtient donc

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

(4) Pour $n \geq 30$, on peut considérer la formule du TLC vraie

$$\text{Donc } \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} \right) \sim N(0, 1)$$

Donc

l'extrapolation linéaire a déjà été faite en cours pour cette valeur.

$$P(-1,645 \leq \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} \leq 1,645) = 1 - \alpha = 90\%$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7290	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608

Donc on veut 5% à droite et à gauche

Donc

$$P(-1,645 \times \sqrt{\bar{X}_n} \leq \bar{X}_n - \theta \leq \sqrt{\bar{X}_n} \times 1,645) = 90\%$$

$$\Rightarrow P(-1,645 \times \sqrt{\bar{X}_n} - \bar{X}_n \leq -\theta \leq \sqrt{\bar{X}_n} \times 1,645 - \bar{X}_n) = 90\%$$

$$\Rightarrow P(1,645 \times \sqrt{\bar{X}_n} + \bar{X}_n \geq \theta \geq \sqrt{\bar{X}_n} \times 1,645 + \bar{X}_n) = 90\%$$

Donc l'intervalle de confiance se calcule à partir de la réalisation de l'échantillon $\bar{x}_n = 5$

et $n = 100$

$$IC = \left[\bar{x}_n - \frac{1,645}{\sqrt{\bar{x}_n}} ; \bar{x}_n + \frac{1,645}{\sqrt{\bar{x}_n}} \right]$$

$$= \left[5 - \frac{1,645}{\sqrt{5}} ; 5 + \frac{1,645}{\sqrt{5}} \right]$$

$$= [4,264 ; 5,736]$$

$$\rightarrow z_{0,95} \in [1,64 ; 1,65]$$

$\alpha = 10\%$

Variables aléatoires continues

Définition: On rappelle qu'une variable aléatoire (v.a.) est une application

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

où Ω est un ensemble d'événements.

Exemples: • La variable aléatoire qui donne le nombre inscrit après un lancé de dé.

• La variable aléatoire qui donne 1 si on fait pile et 0 si on fait face.

Observation: Pour le moment, les v.a. que nous avons vu sont des v.a. discrètes (v.a.d.). Elles ont la particularité d'être à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{N} (\subseteq \mathbb{R})$$

Ex.: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{H}(n, m, N)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, etc.

Dans ce cours (de ce semestre), on verra des variables aléatoires réelles absolument continues (v.a.r. abs. cont.). On rappelle la différence dans cette introduction.

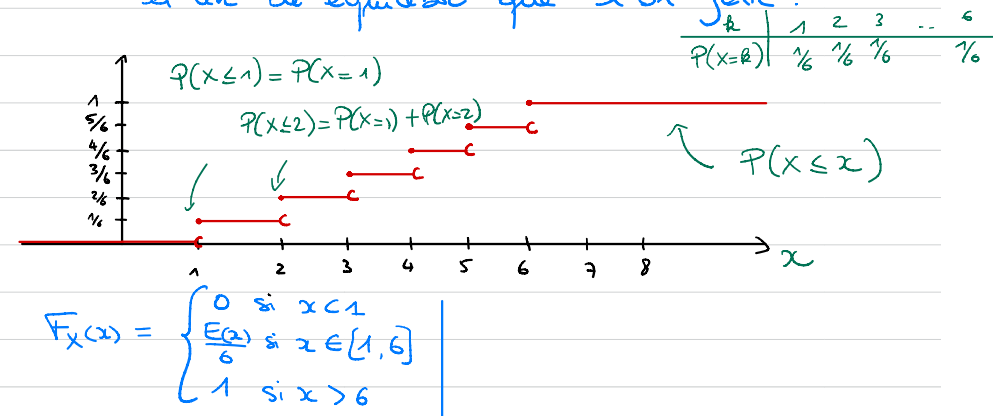
Définition: Soit X une v.a.r. La fonction de répartition de X , notée F_X est une fonction définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Elle:

- détermine la loi de X .
- est continue à droite
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

Exemple: Soit X la v.a.d. qui vaut la valeur d'un dé équilibré que l'on jette.



Définition: Soit X une var. absolument continue. Alors X admet une fonction de densité, f_X , donnée par

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

Propriétés de la fonction de densité de X :

- ① f_x est positive et continue par morceaux
- ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_x(x) = 0$
- ③ $\int_{\mathbb{R}} f_x(x) dx = 1$ (On est sûr que $X \in \mathbb{R}$)
- ④ $P(X \in A) = \int_A f_x(x) dx$ où $A \in \mathbb{R}$.
- ⑤ $F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$

On rappelle que
 $\int_{-\infty}^x f_x(t) dt$
 $:= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x f_x(t) dt$

La fonction de densité de cette loi prend donc la valeur 0 si $x \notin [0,1]$ et la valeur 1 si $x \in [0,1]$.

$$\Rightarrow f_x(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

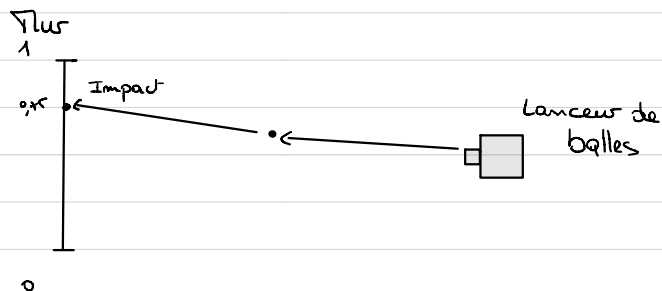
On a bien $\int_{\mathbb{R}} f_x(x) dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$
Factos de !

De plus, $F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple: Une machine lanceuse de balle de squash lance une balle au hasard sur le mur

On note X la variable aléatoire qui nous donne la position horizontale d'arrivée de la balle sur le mur.

<https://youtu.be/GZYRMGV7sSY>



X prend donc ses valeurs entre 0 et 1 de manière aléatoire avec la même probabilité pour chaque valeur $\in [0,1]$. On dit que X suit une loi uniforme sur $[0,1]$

$$X \sim \mathcal{U}(0,1)$$

Différences :

Discrètes	Absolument continue.
prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$	prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
Connaître $P(X=k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ suffit pour connaître la loi de X .	La loi de X est connue grâce à sa fonction de répartition ou sa fonction de densité.
$P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X=k)$ On rappelle que A doit être un sous ensemble de $\mathbb{N}$.	$P(X \in A) = \int_A f_x(x) dx$ où f_x est la fonction de densité de X et $A \subseteq \mathbb{R}$
$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$