Rattrapage de Mathématiques et statistiques appliquées aux sciences sociales - S3

L2 AES

juin 2021

Enseignant : Simon ROBY

Le sujet est composé de plusieurs exercices complètement indépendants. Il est sur 23 points. La note obtenu sera conservée comme note sur 20.
La liste des lois de probabilités discrètes est donnée à la fin de ce sujet (en page 3).

Calculatrice non-programmable autorisé.
Une attention particulière à la rédaction et au soin sera valorisée par le correcteur.

- **Tout résultat illisible ne sera pas corrigé,**
- **Tout résultat sans explication ne rapportera aucun point !**

Exercice 1 **[8 points]**

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x - 1}$$

(1) Montrer que l'ensemble de définition de f :

$$D_f =]1, +\infty[$$

[1 point]

(2) Donner la dérivée de

$$g(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^3 - 1} \end{array}$$

On pourra détailler en posant les fonctions u et v. [2 point]

(3) Montrez que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty \; .$$

On pensera à utiliser la limite du taux d'accroissement. [2 point]

(4) Montrer que la dérivée de f est donnée par:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{2(x-1)^2\sqrt{x^3 - 1}}$$

On détaillera les étapes de calculs. [1 point]

(5) Montrez que $x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$. [0.5 point]

(6) Calculer le signe de la dérivée et établir le tableau de variations complet de f. [1.5 point]

Exercice 2 — [4 points]

Calculer l'intégrale suivante en utilisant une (ou plusieurs) intégration par partie.

$$I = \int_{-2}^{2} x^3 \exp(x)\ dx\ .$$

Exercice 3 — [5 points]

Au poker menteur, célèbre jeu de cartes à deux joueurs, on distribue 5 cartes à l'un deux qui annonce "brelan de rois" (présence de 3 rois exactement sur les 5 cartes tirées). Quelle est la probabilité qu'il ne mente pas s'il n'y a pas de jokers dans le jeu (32 cartes). **Expliquez la démarche et la loi de probabilité utilisée.**

Exercice 4 — [6 points]

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2. [1 point]
2. Montrez par récurrence que $u_n = 7 \cdot \dfrac{2}{3}^n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [3 points]
3. Donnez la limite de u_n. [2 point]

Dénomination	Loi	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$X(\Omega) = \{0,1\}$ $P(X=1) = p$ $P(X=0) = q$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = pq$
Loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = npq$
Loi Uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ $P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi Géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$ $P(X=k) = pq^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$
Loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = [\![0,+\infty[\![$ $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$
Loi Hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n,m,N)$	$X(\Omega) = [0,m]$ $P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{nm}{N}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$

Exercice 1 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{x-1}$$

① On a 2 problèmes de définitions

- $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
- $x^3-1 \geqslant 0 \Rightarrow x^3 \geqslant 1$

$\Rightarrow x \geqslant 1$ car $x \longmapsto x^{\frac{1}{3}}$ est strict. croissante

Donc $\boxed{D_f =]1, +\infty[}$.

② Soit $g(x) = \sqrt{x^3-1}$ $\forall x \in [1, +\infty[$.

dérive

$$g'(x) = 3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

③ $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-1}}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}{x-1}$$

$\sqrt{1-\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{1/2} = \underline{+\infty}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x^3-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} = \underline{+\infty}.$$

④ $$f(x) = \frac{g(x)}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)(x-1) - 1\times g(x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}\times(x-1) - \sqrt{x^3-1}}{(x-1)^2} = \frac{\overbrace{3x^2(x-1)}^{3x^3-3x^2} - 2x^3+2}{2\sqrt{x^3-1}\,(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^3-3x^2+2}{2\sqrt{x^3-1}\,(x-1)^2}}.$$

⑤ $(x-1)(x^2-2x-2) = x^3 - 2x^2 - \cancel{2x} - x^2 + \cancel{2x} + 2$

$= x^3 - 3x^2 + 2$

⑥ $2\sqrt{x-1}\,(x-1)^2 > 0$ sur $]1, +\infty[$

Donc n'influence pas le signe de f'.

On calcule Δ pour x^2-2x-2.

$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$.

$x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = 1+\sqrt{3}$ $\qquad$ $x_2 = 1-\sqrt{3}$

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-1$	0		$+$		
x^2-2x-2		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(1+\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2 :

$$I = \int_{-2}^{2} x^2 \exp(x)\, dx$$

$$= \left[x^2 \exp(x) \right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} 2x \exp(x)\, dx$$

$$= 4e^2 + 4e^{-2} - \left[2x \exp(x) \right]_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2} 2\exp(x)\, dx$$

$$= \cancel{4e^2} + 4e^{-2} - \cancel{4e^2} + 4e^{-2} + 2e^2 + 2e^{-2}$$

$$= 2e^2 + 10e^{-2}$$

Exercice 3 :

C'est un tirage sans remise. Donc la probabilité est régie par une loi hypergéométrique. Ici :

$n = 5 \longrightarrow$ nbr de tirages

$m = 4 \longrightarrow$ nbr de "tirages réussite" = 4 rois dans le jeu

$N = 32 \longrightarrow$ nbre de cartes.

On veut tirer 3 rois :

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{32-4}{5-3}}{\binom{32}{5}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{28 \times 27}{\cancel{2}}}{{}^{8}\frac{\cancel{32} \times 31 \times \cancel{30} \times 29 \times 28}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}}}$$

$$= \frac{\cancel{2} \times \cancel{28} \times 27}{{}^{4}\cancel{8} \times 31 \times 29 \times \cancel{28}} = \frac{27}{3596}$$

$$= \underline{0,0075}.$$

Exercie 4 :

① $u_1 = \frac{2}{3} \times 10 + 1 = \frac{20}{3} + 1 = \frac{23}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{23}{3} + 1 = \frac{46}{9} + 1 = \frac{55}{9}$

② initialisation : $7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 3 = 10 = u_0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$.

Alors $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1 = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 2 + 1$

$= 7 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3$

Donc la propriété est bien héréditaire.

Donc $\underline{u_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N}}$.

③ $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

$\underline{= 3}$