

Résumé du vocabulaire du cours d'économétrie

Ce résumé n'est en aucun cas tout ce qu'il faut savoir dans ce chapitre. Les liens entre les notions et les exemples sont primordiaux! Il a été fait seulement pour vous structurer l'esprit.

Coût Total : Le cout total C d'une entreprise est donné en fonction de la quantité de production. Il comprends le salaire des salariés, la location des locaux, ... Exemple : $C(q) = 2q^2 - 50q + 300$

Coût moyen : Le coût moyen CM est la coût par unité de production. C'est donc la moyenne des de por-
duction par quantité produite.

$$CM(q) := \frac{C(q)}{q}$$

Coût marginal : Le coût marginal Cm est le coût de production d'une quantité supplémentaire. $Cm(234)$ est le coup de production de la pièce 235.

$$Cm(q) := C'(q)$$

Recette totale : La recette totale R d'une entreprise est donnée en fonction du prix P et de la quantité vendue. Si vous vendez 3 produits à 15 euros vous faites une recette de 45 euros. *Attention : Le prix dépend en général de la quantité vendue ! C'est l'élasticité-prix de la demande qui donne la dépendance.*

$$R(q) = P(q) \times q$$

Recette marginale : Comme le coût marginal, La recette marginale est la recette d'une production supplé-
mentaire. $Rm(127)$ est la recette obtenue par la production de la pièce 128. Pour calculer $Rm(127)$ il vous faut les valeurs

Quantité	Prix de vente de chaque produit	Recette
127	1000	$127 \times 1000 = 127000$
128	998	$128 \times 998 = 127744$

Donc $Rm(127) := R(128) - R(127) = 127744 - 127000 = 744$ euros. L'entreprise gagne 744 euros entre une production de 127 et une production de 128.

Profit total : Le profit total Pr est la différence entre la recette et les coûts pour une quantité donnée.

$$Pr(q) := R(q) - C(q)$$

Profit marginal : Le profit marginal $Pr(m)$ est la différence entre la recette marginale et les coûts marginaux pour une quantité donnée. C'est aussi le profit de production d'une pièce supplémentaire.

$$Prm(q) := Rm(q) - Cm(q)$$

Elasticité-point : L'élasticité-point ε_a^f d'une fonction f au point a représente la manière dont évolue la fonction f par rapport à la manière d'évoluer de la variable. Elle est donné par la formule

$$\varepsilon_a^f := \frac{af'(a)}{f(a)}$$

Elasticité-prix de la demande : l'élasticité-prix de la demande nous donne la manière dont varie un prix d'un produit en fonction de la quantité produite. C'est souvent représenté par une courbe décroissante.

$$\varepsilon = - \frac{\text{variation de la demande en pourcent (\%)}}{\text{variation du prix en pourcent (\%)}}$$

Pour un produit ("normal") donné la demande est

- élastique si $\varepsilon > 1$. Cela veut dire que le prix baisse peu avec l'augmentation de la demande. Rm est alors positive et l'entreprise a intérêt à produire plus pour augmenter les recettes (*attention cela ne prend pas en compte les coût!*).
- inélastique si $\varepsilon < 1$. Cela veut dire que le prix baisse beaucoup avec l'augmentation de la demande. Rm est alors négative et l'entreprise a intérêt à produire moins pour augmenter les recettes (*attention cela ne prend pas en compte les coût!*).

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES
EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT POUR LA COLLE

Etudes de fonctions

(*) EXERCICE 1

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1 .$$

On appelle Γ la courbe représentative de f .

- ① Donnez l'ensemble de définition de f .
- ② Etudier la parité de f (Dire si elle est paire, impaire ou aucun des deux).
- ③ Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- ④ Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
- ⑤ Dresser le tableau de variations de f .
- ⑥ f admet elle un maximum ou un minimum local ?

(*) EXERCICE 2

Soit la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus 1$, par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} .$$

On note C_f sa courbe représentative.

- ① Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- ② Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
- ③ Dresser le tableau de variation de f .
- ④ f admet elle un maximum ou un minimum local ?

(*) EXERCICE 3

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x - 1}$$

- ① Donnez l'ensemble de définition \mathcal{D} de h .
- ② Calculez la limite de h en $+\infty$, $-\infty$, 1.
- ③ Calculez la dérivée h' de h .
- ④ Etablir le tableau de variation de h .

- ⑤ Soit Δ la droite d'équation $y = -x + 3$. Dire quand la courbe de h est au dessus ou en dessous de Δ .
- ⑥ Donnez la formule de la tangente de h en un point $a \in \mathcal{D}$.
- ⑦ Donnez la formule de la tangente à la courbe en $x = 2$.

(**) EXERCICE 4 _____

On donne la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$$

et on note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- ① Montrer que g est périodique de période 2π .
- ② Montrer que g est paire.
- ③ Calculez la dérivée de g .
- ④ Etudier le signe de g' sur $[0; \pi]$
- ⑤ Dresser le tableau de variations de g sur $[0; \pi]$.
- ⑥ g admet elle un maximum ou un minimum local sur $[0; \pi]$?

(***) EXERCICE 5 _____

Donnez les ensembles de définition D , les dérivées et les tableaux de variations sur D des fonctions suivantes :

- ① $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \sin(x)}$
- ② $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- ③ $h(x) = \ln(x - 2)$
- ④ $i(x) = \exp(x^2 - 2x - 1)$

Suites numériques

(*) EXERCICE 6 _____

Les suites suivantes, donnée par leur terme général, sont-elles croissantes ? décroissantes ?

- ① $u_n = n^2 + 5n + 4 \quad n \in \mathbb{N}$
- ② $v_n = \frac{-2n + 3}{n + 1} \quad n \in \mathbb{N}$
- ③ $w_n = \sqrt{2n + 5} \quad n \in \mathbb{N}$
- ④ $t_n = \frac{2^n}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$

(*) EXERCICE 7 _____

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

- ① Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- ② Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 3$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 .
- ③ Montrez par récurrence que $v_n = 7 \cdot \frac{2^n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ En déduire la valeur de u_n en fonction de n .
- ⑤ Dire si (u_n) est croissante ou décroissante.
- ⑥ u_n est elle majorée ? Minorée ?
- ⑦ Donnez la limite de u_n .

(**) EXERCICE 8 _____

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2$$

et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

- ① Montrez que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et donc définis.
- ② Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$ (On peut penser à faire par récurrence et montrer que $u_{n+1} - 1 > 0$).
- ③ Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$$

- ④ Déterminer le sens de variation de la suite.

(**) EXERCICE 9 _____

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n + 1}$$

- ① Calculer u_2 .
- ② Démontrer par récurrence que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = nu_n$ admet un terme général de la forme :

$$v_n = 4n - 3$$

- ③ En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis l'expression de u_n en fonction de n .
- ④ En déduire que la suite u_n est strictement monotone et bornée.

(*) EXERCICE 10 _____

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n , l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Introduction à la gestion de l'économie d'une entreprise

(*) EXERCICE 11

Une entreprise fabrique des agendas. Le coût total de l'entreprise est définie sur $[0, 11]$ par $C(x) = 0,3x^3 - 3x^2 + 9x + 6$. C est exprimé en millier d'euros (si $C(x) = 1$ le coût total est de 1000 euros) et x en millier d'articles (si $x = 0,5$ représente 500 articles). On suppose que chaque article fabriqué est vendu. Un article est toujours vendu 9 euros. Il n'y a pas de modification du prix en fonction de la quantité vendue

- ① Donner la recette totale de l'entreprise en fonction de la quantité x .
- ② Donner les fonctions de coût marginal et de coût moyen.
- ③ Grâce à ces fonctions, trouvez le point de la courbe qui permet de minimiser le coût moyen de production.
- ④ Donner la formule du profit total de l'entreprise et calculez le en fonction de x .
- ⑤ Quel est le maximum de profit que l'entreprise peut faire et pour quelle quantité vendue ?

(*) EXERCICE 12

Une entreprise fabrique de la soupe. Le coût total, exprimé en euros, est donné par la fonction C .

$$C(q) = \frac{q^3}{2} - 5q^2 + 40q + 98$$

où q est la quantité exprimée en hectolitres. L'entreprise peut produire entre 0 et 10 hl de soupe dans la journée.

- ① Déterminer les coûts fixes et le coût total induit par une production de 10 hectolitres.
- ② Donner l'expression du coût marginal Cm . Dresser le tableau de variation de Cm et commenter.
- ③ Donner l'expression du coût moyen CM et montrer que sa dérivée peut s'écrire ainsi :

$$CM'(q) = \frac{(q-7)(q^2+2q+14)}{q^2}$$

- ④ Établir le tableau de variation de CM et déterminer la quantité de soupe à produire pour que le coût moyen soit minimal. Comment aurait-on pu trouver ce résultat autrement ?

Intégrales et primitives

(*) EXERCICE 13

Calculer grâce à une ou plusieurs IPP les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^1 x \exp(x-2) dx \quad \textcircled{2} \int_{-1}^2 x \cos(2x) dx \quad \textcircled{3} \int_{-1}^2 x^2 \sin(x) dx \quad \textcircled{4} \int_1^2 x \ln(x) dx$$

(**) EXERCICE 14

Calculer grâce à une ou plusieurs IPP les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^3 x^3 \exp(3x) dx \quad \textcircled{2} \int_1^3 x^3 \sin(x^2) dx \quad \textcircled{3} \int_{-1}^3 x^3 \exp(x^2) dx \quad \textcircled{4} \int_1^5 \ln(x) dx$$

(*) EXERCICE 15 _____

Mettre en éléments simples puis trouver la primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} \quad g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{2x - 1} \quad h(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 2x + 5}{3x + 2} \quad j(x) = \frac{2x^4 - 5x + 5}{x - 1}$$

(**) EXERCICE 16 _____

Mettre en éléments simples puis trouver la primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad g(x) = \frac{2x^5 - 5x^3 + 5x}{x^2 + 3x + 2} \quad h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 6x + 5} \quad j(x) = \frac{x^4 + 5x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

Probabilités

Pour que vous puissiez vous entraîner sur la probabilité j'ai classé les exercices par loi. Le jour du partiel la loi ne sera pas précisée. Nous avons vu en cours dans quels cas on utilise quelle loi. Ces exercices vous donnent encore d'autres exemples de ces cas.

Loi Binomiale

(*) EXERCICE 17 _____

Dans une ville dont la population est très jeune, on sait qu'il y a 40% de mineurs et par conséquent 60% d'adultes. On considère des échantillons de 100 personnes choisies au hasard parmi les habitants de cette ville. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes, associe le nombre d'adultes qu'il contient.

- ① Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n; p)$ dont on précisera les paramètres.
- ② Calculer l'espérance $E(X)$ de cette loi.
- ③ Calculer $P(X \geq 60)$ et interpréter concrètement le résultat.

(*) EXERCICE 18 _____

Une personne achète trois semaines de suite un billet de tombola. Sachant que les billets gagnants suivent une loi binomiale d'espérance 0,12 calculer :

- ① La probabilité pour qu'un billet soit gagnant.
- ② La probabilité pour que les trois billets soient gagnants.

(***) EXERCICE 19 _____

Deux urnes contiennent chacune une proportion p de boules rouges. On tire avec remise n_1 boules de l'urne 1 et n_2 boules de l'urne 2. Sachant que m des $n_1 + n_2$ boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité que le nombre de boules rouges tirées de l'urne 1 soit k ?

Loi Hypergéométrique

(*) EXERCICE 20 _____

Au poker menteur, célèbre jeu de cartes à deux joueurs, on distribue 5 cartes à l'un deux qui annonce « brelan de rois » (présence de 3 rois exactement sur les 5 cartes tirées). Quelle est la probabilité qu'il ne mente pas :

- ① s'il n'y a pas de jokers dans le jeu (32 cartes) ?
- ② s'il y a un joker (32 cartes + joker) ?

(*) EXERCICE 21 _____

On tire au hasard un échantillon de 5 personnes d'une classe de 12 personnes dont 4 sont des fumeurs. Soit X le nombre de fumeurs observés dans l'échantillon tiré.

- ① Quelle loi suit X ?
- ② Déterminer la distribution complète (c'est-à-dire, les probabilités $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, \dots, 4$).

(*) EXERCICE 22 _____

À la fin d'une fête à laquelle participent 20 personnes, dont 12 femmes, on tire au hasard (sans remise) les noms de 7 personnes qui se voient offrir un cadeau.

- ① Quelle est la probabilité qu'exactly deux des gagnants soient des femmes ?
- ② Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 3 femmes parmi les gagnants ?

(***) EXERCICE 23 _____

Deux urnes contiennent chacune une proportion p de boules rouges. On tire sans remise n_1 boules de l'urne 1 et n_2 boules de l'urne 2. Sachant que m des $n_1 + n_2$ boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité que le nombre de boules rouges tirées de l'urne 1 soit k ?

Loi Géométrique

(*) EXERCICE 24 _____

Un joueur à la roulette mise toujours sur le noir, avec l'intention de s'arrêter au premier gain. [On suppose que la probabilité d'avoir noir à la roulette est $18/38$].

- ① Quelle est la probabilité qu'il doive jouer exactement 8 fois ?
- ② Quelle est la probabilité qu'il doive jouer plus de 8 fois ?
- ③ Quelle est la probabilité qu'il doive jouer 8 fois ou moins ?

(**) EXERCICE 25 _____

Un couple décide d'avoir des enfants jusqu'à ce qu'il ait au moins un enfant de chaque sexe.

- ① Quelle est la probabilité qu'il ait 4 enfants ?
- ② Quelles sont l'espérance et la variance du nombre d'enfants qu'il aura ?

(*) EXERCICE 26 _____

On lance un dé jusqu'à ce qu'apparaisse la face «6».

- ① Quelle est la probabilité que le dé soit lancé exactement 8 fois ?
- ② strictement moins de 8 fois ?
- ③ 8 fois ou moins ?

Loi de Poisson

(*) EXERCICE 27 _____

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

(*) EXERCICE 28 _____

Le taux de naissance au Canada est d'environ 43 naissances par heure.

- ① Quelle est la probabilité que durant les 5 prochaines minutes il y ait 3 naissances ou plus ?
- ② Quelle est la probabilité que 10 minutes s'écoulent sans aucune naissance ?

(*) EXERCICE 29 _____

Un certain défaut dans la fabrication de plaques d'email se présente sous la forme de minuscules taches blanches sur la surface de l'email. Admettons que le nombre de taches X sur une plaque suit une loi de Poisson de paramètre λ . Si $\lambda = 1$, calculer

- ① la probabilité qu'une plaque d'email contienne 2 taches ;
- ② la probabilité qu'une plaque d'email contienne deux taches ou plus ;
- ③ la probabilité que 3 plaques d'email contiennent en tout 3 taches ;

(*) EXERCICE 30 _____

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?