Université de Lorraine - Metz **Mars 2021**

L2. Analyse 3. Durée 1 heure.

Tous les documents, calculettes et téléphones portables sont interdits.

Questions de cours : [8 points]

1) Soit E un. espace vectoriel normé et A une partie de E. Donner la définition de l'adhérence de A et monter que : [2 points]

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

2) Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Si oui les prouver, sinon donner un contre-exemple. [3 points]
2.a Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
2.b Une réunion quelconque de fermés est un fermé.
2.c $\complement_E \overline{A} = \overbrace{(\complement_E A)}^{\circ}$.
3) Soit E un espace de Banach.
3.a Qu'est-ce que ça signifie ? [0.5 point]
3.b Soit A une partie de E. Monter que A est complet si et seulement si A est un fermé de E. [1.5 point]
4) Énoncer le théorème de caractérisation des applications linéaires continues. [1 point]

Exercice : [7 points]

Soit E un espace vectoriel normé. Soient $A \subset E$, $B \subset E$ et $x \in E$. On définit

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} \|x-y\| \qquad \text{et} \qquad d'(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|x-y\|\ .$$

1. Montrer que pour toute partie A de E, l'application $d(\ \cdot, A) : E \to \mathbb{R}^+$ est une application continue. On pourra montrer qu'elle est 1-contractancte. [1.5 point]
2. Montrer que $d(x,A) = 0$ équivaut à $x \in \overline{A}$. [1 points]
3. Dans cette question, A, B sont compacts.
   3.a. On suppose que $d'(A,B) = 0$. Montrer, en utilisant la caractérisation de la borne inférieure, qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de A et B respectivement, telles que [0.5 point]
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a_n - b_n\| < \frac{1}{n}$$
   3.b. Montrer qu'il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers un point $a \in A$. Montrer que la suite $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers a. [1 point]
   3.c. Déduire de ce qui précède que $d'(A,B) = 0$ équivaut à $A \cap B$ non vide. [1 point]
   3.d. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble de tous les compacts de E. L'application d' peut-elle définir une distance sur $\mathcal{K}$? [1 point]
4. On prend $E = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup(|a|,|b|,|c|,|d|)$ si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Déterminer la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$? [1 point]