Université de Lorraine-Site de Metz — Année universitaire 2020-2021

L2 Mathématiques

Analyse 3

Feuille de TD 1 : Espaces normés

(∗) Exercice 1

Déterminer toutes les normes sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'elles sont toutes équivalentes.

(∗) Exercice 2

1. Montrer que les applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^n$ sont des normes.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},\ \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| \text{ où } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Indication : pour $\| \|_2$, on pourra admettre l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

qui sera démontrée en cours d'algèbre bilinéaire.

2.

2. Montrer que ces 3 normes sont deux à deux équivalentes.
3. Dans le cas $n = 2$ et $n = 3$, dessiner les boules unités centrées à l'origine.

(∗) Exercice 3

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Shwartz valable sur E.

$$\forall (f,g) \in E^2, |\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt}$$

1) Montrer que les 3 applications suivantes définissent une norme sur E :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad , \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \quad , \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

2) Montrer que :

$$\|f\|_\infty \geq \|f\|_2 \geq \|f\|_1 \ , \qquad \forall f \in\ E$$

mais qu'il n'existe pas de réel A tel que :

$$\|f\|_1 \geq A\|f\|_\infty \qquad \forall f \in\ E$$

(Considérer les fonctions $t \to t^n$, pour $n = 0, 1, \ldots$)

3) Montrer que $\| \|_\infty$ et $\| \|_2$ ne sont pas équivalentes. (Considérer la suite $(f_n)_{n\in\ \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall x \in [0, 1/n],\ f_n(x) = \sqrt{nx}$,$\forall x \in [1/n, 2/n],\ f_n(x) = \sqrt{2 - nx}$,$\forall x \in [2/n, 1],\ f_n(x) = 0$)

Exercice 4.

1) Soient dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ les parties $A =]0,2[\cup]3,4[$ et $B =]1,3[\cup]4,5[$. Montrer que les quatre ensembles suivants sont différents deux à deux :

$$A \cap \bar{B},\ \bar{A} \cap B,\ \bar{A} \cap \bar{B},\ \overline{A \cap B}.$$

2) Préciser si les ensembles suivants sont des ensembles bornés, ouverts, fermés de $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$:

$$\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,3)\}, [1,3] \times [2,4],]1,3[\times]2,4[, [1,3[\times]2,4]$$

$$[1,3[\times[2,4[, \mathbb{R}^2\times]0,\infty[, \mathbb{R} \times [0,\infty[, \{(2,4)\}$$

3) Trouver l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad \mathbb{R}\times]0,1[\quad [0,1] \times [0,1] \quad A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 5.

Soient $(E, \| \ \|)$ un evn et A et B deux parties de E .

1 Montrer que $\complement_E(\overset{\circ}{A}) = \overline{\complement_E A}$. En déduire que $(\complement_E \bar{A})^{=}\overset{\circ}{\overbrace{(\complement_E A)}}$.

2) Montrer que $\forall a \in E, \forall R > 0,\ B(a,R) = a + B(0,R)$. A-t-on le même résultat pour les boules fermées ?

3) Montrer que le translaté d'un ouvert (resp fermé) est un ensemble ouvert (respectivement fermé).

4) Montrer que si B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

5) Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.

6) Montrer les équivalences suivantes :

$$A = \bar{A} \Leftrightarrow A \text{ est fermé},\ A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \text{ est ouvert.}$$

6) Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$. Qu'en est-il pour l'intérieur ?

7) Soient E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2 (ce n'est qu'une notation). Montrer que :

a) $A \subseteq E$ est ouvert (resp fermé) dans (E, N_1) si et seulement si A est ouvert (reps fermé) dans (E, N_2).

b) Montrer qu'une suite de points de E converge dans (E, N_1) si et seulement si elle converge dans (E, N_2) et vers la même limite.

Exercice 6.

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$.

a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que si F est ouvert alors $F = E$.

Exercice 7.

Soient $(E_1, \| \ \|_1)$ et $(E_2, \| \ \|_2)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. On considère $(E_1 \times E_2, N_\infty)$, où

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2, N_\infty(x,y) = max((\|x\|_1, \|y\|_2)$$

Montrer que :

a) $(a,b) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n)$ dans $E_1 \times E_2$ si et seulement si $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

b) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$

c) $A \times B$ est fermé dans $E_1 \times E_2 \Longleftrightarrow A$ est fermé dans E_1 et B est fermé dans E_2.

d) $Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times Fr(B))$ (on rappelle que $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$).

e) Soit $p : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1(x,y) \longmapsto x$ Montrer que p est continue et que l'image d'un ouvert est un ouvert. En est-il de même pour les fermés ?($E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\}$).

f) Dans $(\mathbb{R}^n, N_\infty)$ caractériser la convergence d'une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8.

Soient $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \| x - y \|$$

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
2. Montrer que l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = d(x, A)$ est 1-contractante puis uniformément continue.

Soient A et B deux parties non vides.

3. Montrer que si $A \subseteq B$, alors pour tout $x \in E,\ d(x, B) \leq d(x, A)$.
4. Montrer que $\Big\{x \in E \ \mid \ d(x, A) = d(x, B)\Big\}$ est un fermé de E et que $\Big\{x \in E \ \mid \ d(x, A) < d(x, B)\Big\}$ est un ouvert de E.
5. Déduire de la question précédente que si A et B sont deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 9.

Montrer que dans un compact, toute suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 10.

1) Soient $(E, \| \ \|)$ un e.v.n et (x_n) une suite de points de E convergente et x sa limite, montrer que l'ensemble $A = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

2) a) Soit f une application continue de E dans lui même. Montrer que si l'image réciproque de tout compact est un compact, alors l'image de tout fermé est un fermé.

b) La propriété reste-t-elle vraie si on a seulement : $\forall y \in E,\ f^{-1}(\{y\})$ est compact ? (Considérer $E = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$)

Exercice 11.

Soient $(E_1, \| \ \|_1)$ et $(E_2, \| \ \|_2)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. On considère $(E_1 \times E_2, N_\infty)$, où

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2, N_\infty(x, y) = max((\|x\|_1, \|y\|_2)$$

1) Soient A et B deux parties de E_1 et E_2 respectivement.

a) Montrer que $A \times B$ est un compact de $E_1 \times E_2$ si et seulement si A et B sont compacts

b) Montrer que la somme de deux compacts dans un espace vectoriel normé est un compact.

Exercice 12.

Soit $f : (E_1, \| \ \|_1) \to (E_2, \| \ \|_2)$ telle que la restriction à tout compact est continue. Montrer que f est continue. (On rappelle que f est continue au point a si et seulement si, pour toute suite (x_n) de points de E convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$)

Exercice 13.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Déterminer $|||f|||$ dans les 3 cas suivants :

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|,\ \|(x_1, x_2)\|_\infty = \sup(|x_1, |x_2|),\ \|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Exercice 14.

Soit $I : (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, | \,.\, |)$ l'application définie par $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. Montrer que I est continue et calculer $|||I|||$.

Exercice 15.

Soient E un espace vectoriel normé , A une partie compacte de E et f une application continue de A dans E. On suppose que f n'admet pas de point fixe dans A. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\forall x \in A, \parallel x - f(x) \parallel \geq k$.

Indication : considérer l'application g de E dans E définie par : $g(x) = \parallel x - f(x) \parallel$.

Exercice 16.

Soit $E = M_n(R)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans R. On munit R^n de la norme euclidienne et on pose :

$$\forall M \in E, \quad |||M||| = \sup_{X \in \ R^n X \neq 0} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

$I)a)$ Montrer que $|||\ |||$ est une norme sur E et que

$$\forall M \in E, \forall X \in \ R^n \quad \|MX\| \leq |||M||| \|X\|$$

$b)$ En déduire que $\forall (M, N) \in E^2, \quad |||MN||| \leq |||M||| |||N|||$.

c) Montrer que$\phi : E \times E \longrightarrow E \qquad (M, N) \longmapsto MN$ est continue

$II)$ Soit $G = GL_n(R)$ l'ensemble des matrices de E de déterminant non nul.

$a)$ Montrer que G est un ouvert de E.

$b)$ Soit $A \in E$. Montrer, en utilisant que toute matrice carrée admet un nombre fini de valeurs propres, qu'il existe un entier $k \in N^*$ tel que pour tout $m \geq k, \quad (A - \dfrac{1}{m} Id) \in G$.

$c)$ En déduire que la suite $(u_p)_{p \in N}$ définie par $u_p = A - \dfrac{1}{p+k} Id$, est une suite de points de G et déterminer sa limite.

$d)$ En déduire que tout voisinage de A rencontre G.

$III)$ On prend $n = 2$. Soit $O(2) = \{M \in M_2(R) / MM^t = Id\}$ où M^t désigne la transposée de M. Montrer que de tout recouvrement ouvert de $O(2)$, on peut extraire un sous recouvrement fini.

Exercice 17.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes en une variable à coefficients dans . Si $P \in E$, s'écrit $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i$.

On pose :

$$N(P) = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i|$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Soit $(P_n)_{n \in}$ la suite définie par $P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{x^i}{i!}$

$a)$ Montrer que (P_n) est une suite de Cauchy dans (E, N).

$b)$ Montrer que cette suite n'est pas convergente dans (E, N).

$c)$ (E, N) est-il complet ?

3) Soit $(Q_n)_{n \in}$ la suite définie par $Q_n(x) = x^n$.

$a)$ Calculer pour $n \neq m$, $N(Q_n - Q_m)$.

$b)$ En déduire que $B'(0, 1)$ n'est pas compacte.