Colles Algèbre 2

Simon ROBY

I Questions de Cours

1) Groupes, sous groupes, morphismes de groupes, classes à gauche et à droite modulo un sous groupe (égalité des cardinaux de l'ensemble des classes à gauche et à droite), ordre d'un sous-groupe, ordre d'un élément, sous-groupes de $(Z,+)$, th de Lagrange formes forte et faibles th de Cauchy (énoncé non démontré à ce moment), sous-groupes distingués + différentes caractérisations, image directe et image réciproque par un morphisme d'un sous groupe, d'un sous groupe distingué, groupes quotients, Z/nZ, théorème d'isomorphisme, groupe monogène, groupe cyclique, théorème de classification des groupes monogènes. Formule démontrée l'ordre en de x^k en fonction de l'ordre de x et du pgcd de k et de l'ordre de x

2) Actions de groupes, définitions, morphismes de groupes associées, exemples, orbite, stabilisateur, relation entre orbite, stabilisateur et l'ordre du groupe, notamment le cardinal de toute orbite est un diviseur de l'ordre du groupe (quand ce dernier est fini)

Pour les exos, on s'arrête aux groupes (feuille 1).

Je vous demande de connaitre les preuves suivantes :

$Ord(x^k) = ord(x)/pgcd(ord(x), k)$ $G/Stab(x)$ $Orb(x)$ $Imageetimageréciproqued'unsousgroupe$ $PreuvedeLagrangeformef$

Sujet 1 : Rosine

I.1. Définition d'un groupe, Théorème de Lagrange Faible, Définition d'une action de groupe

I.2. Démontrez et énoncez la formule : $Ord(x^k) = ...$

I.3. Soit G un groupe, H et K deux sous groupes de G. Posons $HK = \{hk|h \in H,\ k \in K\}$

I.3.1. Montrez que HK ets un sous groupe de G si et seulement si $HK = KH$

I.3.2. Déterminez le cardinal de HK si H et K sont fnis

I.3.3. Si $H \cap K = \{e\}$, Montrez que pour tout $x \in HK$, x a une décomposition unique de la forme $x = hk$, $h \in H$ et $k \in K$

I.4. Etant donnés deux entiers m, n > 0, déterminer tous les morphismes de groupe de Z/mZ dans Z/nZ, puis tous les automorphismes de Z/nZ.

Sujet 2 : Laetitia

I.1. Définition de l'ordre d'un élément, théorème de classification des groupes monogènes, Définition de l'orbite d'un élément x

I.2. Démontrez après avoir expliquer les notations $G/Stab(x) \simeq Orb(x)$

I.3. Démontrez que H est distingué dans G si et seulement si H est le noyau d'un morphisme

I.4. Caractériser les groupes dont l'ensemble E des sous groupes est fini. (Indice : Démontrer que pour un tel groupe tout élément est d'ordre fini puis qu'il est l'union de ses sous groupes monogènes)

Sujet 3 : Floriane

I.1. Définition d'un groupe cyclique, d'un morphisme de groupe, et du stabilisateur d'un élément

I.2. Démontrez que l'image et l'image réciproque d'un morphisme de groupe est un sous groupe du groupe ambiant. Que peut on dire de plus pour ll'image réciproque ?

I.3. Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$

I.4. On pose $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2 x 2 de déterminant 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Sujet 4

I.1. Définition d'un sous groupe distingué, d'un groupe monogène et Théorème de Cauchy

I.2. Donnez la preuve du théorème de Lagrange, forme faible.

I.3. Soit G un groupe et H un sous groupe distingué de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$, $an \in H$. Donner un exemple de sous-groupe H non distingué de G pour lequel la conclusion précédente est fausse

I.4. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe distingué d'ordre n et d'indice m. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre n