Colles Analyse 2 - L2 S3 : Suites et séries de fonctions

Simon ROBY

I Questions de Cours

- Définition de **convergence simple** et **convergence uniforme** d'une suite ou d'une série de fonction
- Définition de **convergence normale** et de convergence absolue de séries de fonctions
- **Critère de Cauchy uniforme**
- Théorèmes de **continuité**, **dérivabilité** et **intégrabilité** relatifs à la convergence uniforme
- CNS pour qu'une série simplement convergente converge uniformément (Reste de la série Converge vers 0).

II Petites applications directes (avec contrexemples)

II.1. Quel implication entre convergence simple et convergence uniforme ? Contre-exemples ?
$f_n(x) = x^n \longrightarrow f(x) = 0$

II.2. Une suite de fonctions continue converge simplement vers une fonction continue ? Contre-exemples ?
Généralement non : $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$

II.3. Une suite de fonctions dérivables converge simplement vers une fonction dérivable ? Contre-exemples ?
Il faut que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément : $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$

II.4. Une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$ converge simplement vers une fonction intégrables sur $[a, b]$? Contre-exemples ?
Il faut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément :

II.5. Donnez une méthode générale pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.
Par exemple, trouver une suite x_n qui tend vers x telle que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$

II.6. Montrez que pour une série $\sum f_n$ convergente simplement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément, alors sa série non plus.
On utilise le critère de Cauchy pour les série uniforme en prenant $n = k - 1$ et $m = k$.

III Exercices d'application directe

III.1. Etudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions suivantes :

(a) $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$

(b) $g_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in \,]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0, 1]$

(c) $h_n(x) = \arctan(nx)$ sur $[0, 1]$, $]0, 1]$ et $[a, 1]$ où $a \in]0, 1[$.

(d) $k_n(x) = sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$.

(e) $l_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

(f) $a_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x(1+nx)} & \text{si } x \in \,]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0, \pi]$

(g) $b_n(x) = \sin^n x \ \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

(h) $c_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ sur $[0,1]$

(i) $\alpha_n(x) = \sum(-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

(j) $\beta_n(x) = \sum \frac{x}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(k) $\gamma_n(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(l) $\delta_n(x) = \sum \frac{\sin nx}{x^2+n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(m) $\eta_n(x) = \sum \frac{x^2 \sin nx}{x^2+n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(n) $\mu_n(x) = \sum \frac{xe^{-nx}}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. (Attention astuce)

(o) $\nu_n(x) = \sum \frac{1}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.

On peut donner la limite de la suite donnée par l'intégrale des fonctions qui sont définies ci-dessus pour voir si les élèves connaissent le théorème d'intégrabilité.

(a) Convergence simple sans problème. Pour voir qu'il n'y a pas de convergence uniforme, il suffit de prendre la suite $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

(b) Convergence simple sans problème. Pour la convergence uniforme, on cherche le **sup** des f_n sur $[0,1]$ en dérivant.

(c) Convergence simple sans problème.
- Pour $[0,1]$, la discontinuité de la fonction limite suffit pour prouver la non-uniformité de la convergence.
- Pour $]0,1]$ et pour $[a,1]$, il suffit de calculer directement le supremum (en dérivant si besoin).

(d) Convergence simple sans problème. Prendre $x_n = \frac{1}{n}$ pour contredire la convergence uniforme. On peut, par contre, montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$, où $a \in]0,1[$.

(e) Convergence simple sans problème. Prendre $x_n = \frac{1}{n}$ pour contredire la convergence uniforme. On peut, par contre, montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(f) Convergence simple sans problème. La discontinuité de f contredit la convergence uniforme. On peut, par contre, montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle $[a,\pi]$, où $a \in]0,\pi[$.

(g) Convergence simple sans problème. Il faut faire une étude de la fonction b_n pour montrer que la valeur absolue de son supremum tend vers 0.

(h) Convergence simple sans problème. Il faut juste utiliser la définition de la convergence uniforme pour conclure.

(i) Juste à majorer le terme général par $1/n^2$, donc normalement convergente.

(j) Convergence simple sans problème. Utiliser la définition de Cauchy uniforme et la contredire en utilisant $x_p = 1/p$.

(k) Convergence simple avec le critère de Leibniz. Contredire le critère de Cauchy uniforme en minorant la somme d'une suite alternée.

(l) Normalement convergente.

(m) Convergence simple immédiate. Pour la convergence uniforme, on peut voir que la suite de fonction ne converge uniformément, donc la série non plus (d'après Cauchy uniforme).

(n) Convergence en multipliant par n au numérateur et dénominateur et en étudiant la fonction au numérateur.

(o) Convergence simple sans problème. Convergence uniforme fausse en prenant $x_n = 1/n$. On peut montrer qu'elle converge normalement sur tout ensemble du type $]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$.

III.2. Supposons qu'une suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction f. Conserve t-on la **croissance** (décroissance), la **parité** ou la **convexité** (concavité) des fonctions f_n pour la fonction limite ?

Aucune difficulté. Juste passer à la limite.

III.3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable. Etudiez la convergence simple et uniforme de

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

La convergence simple est immédiate. La convergence uniforme est fausse en générale. On peut prendre $f(x) = x^3$ par exemple. On peut tout de même montrer avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 que si f est deux fois dérivable et f'' est bornée, alors on a la convergence uniforme.

III.4. Dans cet exercice, on va montrer que la suite de fonction suivante converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in \ [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

(a) Montrez que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \exp(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

(b) Etudiez la fonction

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} [0, n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} - f_n(x) \end{array} \right.$$

(c) Conclure.

Il faut passer à l'exponentielle pour la convergence simple. Une longue étude de fonction (...) mais pas difficile permet de montrer la convergence uniforme.

III.5. On s'interroge sur la convergence uniforme de la série des fonctions f_n, définies sur $[0, 1[$ par :

$$f_n(x) = nx^{n-1} \quad (n \leq 1)$$

(a) Montrer que cette série converge simplement sur $[0, 1[$ grâce au critère de d'Alembert.

(b) Calculer sa somme S en réinterprétant cette série.

(c) Conclure sur la convergence uniforme de cette série.

(a) Tout est dit...

(b) Il faut remarquer que la série est la dérivée d'une série connue.

(c) On peut le faire par l'absurde, en montrant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

III.6. On considère la série des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

(a) Montrez que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrez qu'on a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On dit que la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(c) On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{3^{n+1}}{4} \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

Montrez que $f_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$, puis en déduire la valeur de la somme S de la série.

(d) Soit R_n le reste d'ordre n de cette série. Trouvez une suite x_n pour que ce reste diverge et en déduire que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(a) On montre sans soucis qu'elle converge absolument.

(b) Il suffit de majorer $|x|$ sur tout compact. On a alors une convergence normale.

(c) Il faut faire un calcul de linéarisation pour obtenir :

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

(d) Il suffit de faire le calcul...

III.7. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

Déterminez son ensemble de définition, puis montrez que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur celui-ci privé de 0.

L'ensemble de définition est clairement $[0, +\infty[$. Il suffit de faire les calculs sur $[a, +\infty[$ pour un $a > 0$.

III.8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

Montrez que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Aucune difficultée apparente. Il suffit de calculer $f^{(k)}$ puis de majorer le reste de sa série.

III.9. On considère la série des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$$

Montrez que cette série converge uniformément mais pas normalement.

Il faut juste étudier la fonction pour la convergence normale, et majorer le reste de la somme pour la convergence uniforme.

III.10. On considère la série des fonctions f_n définies sur $[0, 1]$, pour tout $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

Montrez que cette série converge uniformément mais ni normalement, ni absolument.

On montre facilement qu'elle n'est pas absolument convergente en $x = 1$, donc pas normalement convergente. On majore le reste de la série pour montrer qu'elle converge uniformément.

IV Exercices de réflexion

IV.1. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ n^2 x & \text{si } x \in \,[0, \frac{1}{n}] \\ (1-n^2)x + 2n - \frac{1}{n} & \text{si } x \in \,[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 1/n & \text{si } x \in \,[\frac{2}{n}, +\infty] \end{cases}$$

(a) Montrez que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f que l'on déterminera.

(b) Montrez que $f_n \circ f_n$ ne converge pas vers $f \circ f$.

(c) Montrez que, pour une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui même, qui converge uniformément vers une fonction f, alors $f_n \circ f_n$ converge simplement vers $f \circ f$.

(d) Posons $g_n = x^2 + n^{-1}$. Montrez que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g que l'on déterminera, mais que $(g_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $g \circ g$.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $2/N < x$. Donc $\forall n > N$, $f_n(x) = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

(b) Avec les mêmes notations, $f_n \circ f_n(x) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(c) Preuve en 2ϵ.
(d) Prendre $x_n = n$ et montrer que cela ne converge pas.

IV.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles, k-lipschitziennes, définies sur $[a,b]$ qui convergent simplement vers une fonction f.

(a) Montrez que f est elle-même k-lipschitzienne.
(b) Montrez que pour tout x dans un intervalle de taille ϵ sur $[a,b]$, on a :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq 2k\epsilon + \epsilon$$

(c) En déduire que la convergence est uniforme.

(a) Passage à la limite.
(b) il suffit de faire une preuve en 3 ϵ.
(c) Il faut proposer une subdivision de $[a,b]$ de pas inférieur ou égal à ϵ pour un ϵ fixé, puis utiliser la question précédente.

IV.3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômes. On suppose qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

(a) Montrez qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow P_n = P_N + \lambda_n,\ \text{avec } \lambda_n \in \mathbb{R}$$

(b) En déduire, que f est polynomiale.

(a) Utiliser le critère de Cauchy uniforme.
(b) Montrer que λ_n converge puis conclure.

IV.4. Posons $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrez que

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 f(x)e^{-nx}\, dx = f(0)$$

On démontre d'abord le résultat pour un polynôme P quelconque. Puis on utilise le théorème de Weirstrass pour faire une preuve en 3ϵ.
En fait, on peut faire sans Weierstrass, en décomposant l'intégrale de départ en deux $\int_0^\alpha + \int_\alpha^1$ où α est le pendant de ϵ dans la définition de la continuité en 0 de f.

IV.5. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de x^x sur $[0,1]$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(x\ln x)^n}{n!} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(a) Montrez que $\sum f_n$ est une série qui converge uniformément sur $[0,1]$.
(b) Montrez que $x^x = 1 + \sum f_n$.
(c) En déduire que

$$\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

(a) On montre avec un étude de la fonction $\phi(x) = x\ln x$, prolongée par 0 en 0, que cette série est normalement convergente.
(b) Il suffit de faire le calcul.

(c) n intégrations par partie font le travail. Le reste vient du théorème entre intégration et convergence uniforme.

IV.6. On considère la série des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan nx$$

(a) Montrez que $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction S.

(b) Montrez que la fonction S est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrez que S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

(d) Etudiez la dérivabilité en 0. (dur)

(e) Calculer la limite de S en $+\infty$.

(a) Converge normalement, en majorant arctan.

(b) Il faut juste utiliser les résultats du cours...

(c) Idem. On fait les calculs sur $[a, +\infty[$.

(d) Il faut minorer la limite en x de S_N en l'infini.

(e) Il suffit d'encadrer $\arctan nx$ entre $\arctan x$ et $\pi/2$.

V Bibliographie

— Les maths en tête, Analyse, *Gourdon Xavier*, ellipses

— Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions, *El Amrani Mohammed*, ellipses