Colles Analyse 3 - L3 S5 : Espaces vectoriels normés

Simon ROBY

I Colles Analyse 3

- Programme de colle : distance, norme, distance associée à une norme. On ne considère que des esp vec normés (pas d'espace métrique général), normes équivalentes, boules ouvertes, fermées, sphère, voisinage, ouverts(= voisinage de chacun de ses points), propriétés union qq, intersection finie, la boule ouverte est un ouvert, fermés= complémentaire ouvert, la boule fermée est un fermé, un singleton est fermé, propriétés..., Intérieur, Adhérence, caractérisation avec les boules, propriétés par rapport à l'inclusion, la réunion, l'intersection, intérieur de la boule fermée= boule ouverte(dans un evn), adhérence de la boule ouverte= boule fermée
- les suites, suites conv, suites extraites, toute combinaison linéaires de suites conv est convergente, caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence, suites de Cauchy, complet dans un evn, Banach, les complets dans un complet sont les fermés, l'adhérence de Q est R.
- Applications continues : def avec les boules ouvertes, donné le th de caractérisation par les suites, l'image de l'adhérence, l'image réciproque d'un couvert, d'un fermé, somme, composée, produit, la continuité des applications linéaires entre deux evn.caractérisation, norme d'applications linéaires continues.

Vrai ou faux

I.1. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soient A et B deux parties de A. On note

$$A + B = \{a + b | a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Si A est ouvert, $A + B$ est aussi ouvert. Démontrer que les parties $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1$ et $B = 0 \times \mathbb{R}$ sont fermées. Démontrer que A+B n'est pas fermée.

I.2. L'application $P \mapsto N(P) = P(0) + P(1)$ est une norme sur $\mathbb{R}_1[X]$.

I.3. Si (E,N) est un espace vectoriel normé, tel que $x \in E$, $r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon r, alors pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$$

I.4. Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

Prouver que N est une norme et dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.

I.5. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. $N(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty$ définit une norme sur E.

I.6. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R}).N(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ définit une norme sur E.

I.7. Soit $a \geq 0$. Alors $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

I.8.
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$ $\quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\}$ $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{R} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{R}\}$ $\quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Determiner l'intérieur et l'adhérence des ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\right\} \\
B &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\right\} \\
C &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 1\right\} \\
D &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\right\} \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 < 1\right\}.
\end{aligned}$$

Exercices

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = ||gf||_\infty$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $|| \cdot ||_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales.

- Soit $f \in D$. Trouvez une suite de fonctions non dérivables qui converge vers f.
- En déduire l'intérieur de D puis de P.
- Déterminer l'adhérence de D et de P.

Donner un exemple d'ensemble A tel que A , l'adhérence de A , l'intérieur de A , l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit

$$diam(A) = \sup \left\{||y - x|| \;\middle|\; x, y \in A\right\}$$

- Démontrer que $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornés.
- Comparer $diam(\mathring{A})$, $diam(A)$ et $diam(\overline{A})$ lorsque $\mathring{A}$ est non vide.

- Montrer que $diam(Fr(A)) \leq diam(A)$.
- Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x+tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe. En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $Fr(A)$.
- En déduire que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.

Montrer que $diam(Fr(A)) \leq diam(A)$.
En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $Fr(A)$. En déduire que diam(Fr(A))=diam(A)

.

Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$.

— On munit E de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, ||\cdot||_\infty)$.

— On munit E de la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, ||\cdot||_1)$.

Questions de cours

I.1. Donnez les définitions suivantes :
- Distance
- Boule ouverte
- Suite de Cauchy

I.2. Montrez que l'ensemble $]0,1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercices

I.1. Démontrez que l'application $P \mapsto N(P) = P(0) + P(1)$ est une norme sur $\mathbb{R}_1[X]$.

I.2. Déterminez la nature de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminez son intérieur et son adhérence.

I.3. Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
- — On munit E de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, ||\cdot||_\infty)$.
- — On munit E de la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, ||\cdot||_1)$.

Questions de cours

I.1. Donnez les définitions suivantes :
- Norme
- Caractérisation séquentielle des fermée
- Espace de Banach

I.2. Montrez que l'ensemble $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercices

I.1. Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

Prouver que N est une norme et dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.

I.2. Déterminez la nature de $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminez son intérieur et son adhérence.

I.3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $||\cdot||_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales.
- Soit $f \in D$. Trouvez une suite de fonctions non dérivables qui converge vers f.
- En déduire l'intérieur de D puis de P.
- Déterminer l'adhérence de D et de P.

Questions de cours

I.1. Donnez les définitions suivantes :

- Normes équivalentes
- Ouvert
- Espace complet

I.2. Montrez que l'ensemble $]0, +\infty]$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exercices

I.1. Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. $N(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty$ définit une norme sur E.

I.2. Déterminez la nature de $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminez son intérieur et son adhérence.

I.3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = ||gf||_\infty$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Questions de cours

I.1. Donnez les définitions suivantes :

- Voisinage de x dans E un espace vectoriel normé
- Fermé
- Caractérisation séquentielle de l'adhérence

I.2. Determinez la nature de l'ensemble $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercices

I.1. Soit $a \geq 0$. Alors $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

I.2. Déterminez la nature de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminez son intérieur et son adhérence.

I.3. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit

$$diam(A) = \sup\{||y - x|| \text{ tel que } x, y \in A\}$$

- Démontrer que $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornés.
- Comparer $diam(\mathring{A})$, $diam(A)$ et $diam(\overline{A})$ lorsque $\mathring{A}$ est non vide.
- Montrer que $diam(Fr(A)) \leq diam(A)$.
- Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble

  $$X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$$

  Montrer que $\sup X$ existe. En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $Fr(A)$.
- En déduire que diam(Fr(A))=diam(A).

Questions de cours

I.1. Donnez les définitions suivantes :
   - Distance associée à une norme N
   - Caractérisation de la continuité d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés par les suites
   - Adhérence

I.2. Montrez que l'ensemble $]0,5]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercices d'application

I.1. Soit E un espace

Exercices de reflexion

Questions de cours

I.1. Donnez les définitions suivantes :
- Boule fermé
- Intérieur
- Suite convergente dans un espace vectoriel normé

I.2. Montrez que l'ensemble $[0, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercices d'application

I.1. Soit E un espace

Exercices de reflexion

II Bibliographie

— Les maths en tête, Analyse, *Gourdon*