Colles de probabilités - L2 S4 : Introduction à la théorie des probabilités et à la théorie de la mesure

I Questions de cours

- Définition d'une tribu (ou σ-algèbre), sous-tribu, tribu borélienne.
- Définition d'une fonction mesurable et d'une tribu engendrée par une fonction mesurable.

Pour un univers Ω fini ou dénombrable.

- Définition d'une fonction de masse sur Ω.
- Définition d'un évènement et de la probabilité d'un évènement.
- Définition d'une mesure de probabilité, la propriété de σ-additivité, la croissance de la mesure de probabilité, la probabilité d'une réunion d'un complémentaire.
- Définition d'une probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, formule de Bayes, définition de deux évènements indépendants, formule des probabilités composées.
- Définition d'une variable aléatoire discrète X, de la mesure de probabilité associée (ou fonction de masse de X).

II Exercices d'application directe

II.1. Posons $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur un ensemble Ω. Posons :

$$\mathcal{I} = \{A_1 \cap A_2 |\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

et

$$\mathcal{U} = \{A_1 \cup A_2 |\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

(1) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ sont elles des tribues ? Si oui pourquoi ? Sinon, donnez un contre-exemple.

(2) Montrez que $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$

II.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesuré dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou ponctuellement) vers f. Montrez que f est mesurable.

II.3. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et soit $F \subset \Omega$. Montrez que

$$\mathcal{A}_F = \{A \cap F | A \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu sur F. On l'appelle la <u>tribu trace</u> de $\mathcal{A}$ sur F.

II.4. Soit Ω dénombrable. Déterminez la tribu engendrée par $P = \{\{x\} | x \in \Omega\}$.

II.5. Prenons Ω et Π deux ensembles et $f : \Omega \to \Pi$ une application.

(1) Montrez que si $\mathcal{A}$ est une tribu de Π alors $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de Ω. On appelle cette tribu la tribu image réciproque de $\mathcal{A}$.

(2) Montrez que pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Pi)$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$.

II.6. Prenons Ω et Π deux ensembles et $f : \Omega \to \Pi$ une application.

(1) Montrez que si $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω alors $f(\mathcal{A}) := \{B \subset \Pi | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de Π. On appelle cette tribu la tribu image directe de $\mathcal{A}$. Peut on dire pourquoi n'a-t-on pas choisi $f(\mathcal{A}) := \{f(A) | A \in \mathcal{A}\}$? Expliquez.

(2) Montrez que pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Pi)$, on a $\sigma(f(\mathcal{A})) = f(\sigma(\mathcal{A}))$.

II.7. Votre professeur de "Calcul approximatif" décide de classer les 32 étudiants de sa classes en fonctions de leurs copies. Celles ci étant très proches, il décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles :

— sans ex-aequo ?

— avec exactement 2 ex-aequo ?

II.8. Si 600 personnes sont présentes à un mariage et si, pendant la journée, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ?

II.9. Deux maladies A et B ravagent une population. La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p et celle d'être atteint par une maladie B avec une est q. On suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

II.10. Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un valet» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? Quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Quand on joue au "Pouilleux", jeu de carte bien connu (ou pas), le but est de ne pas garder le valet de pique. On distribue toute les cartes, en retirant le valet de trèfle du jeu. Si on joue à 5, quelle est la probabilité d'avoir le valet de pique au départ ?

II.11. Dans un jeu de 32 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer une dame» et «tirer un coeur» sont-ils indépendants ? Quelle est la probabilité de «tirer une dame ou un coeur» ?

Aux cartes, on dit souvent "Dame de coeur à toi l'honneur !" pour savoir qui commence à jouer. Si on distribue 6 cartes chacun, quelle est la probabilité que je commence à jouer ?

II.12. Dans une famille, il y a 2 enfants. Considérons les événements

- A : «il y a deux enfants de sexes différents»
- B : «la famille a au plus une fille»

Sont-ils indépendants ? Même question si la famille comporte 3 enfants. Généraliser.

II.13. Un professeur (pas moi) oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Qn = P(\bar{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $1/10$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $4/10$. Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n. Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

II.14. Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds. On choisit un individu au hasard. Calculez la probabilité des évènements suivants : 1. Si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. 2. Si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. 3. Si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

II.15. Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne. Le trimoteur peut voler si le moteur central ou les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ?

II.16. Une boîte A contient 1 boule blanche et 3 boules rouge. Une boîte B contient 5 boules blanches et 3 boules rouge. On tire au hasard une boule de A et une boule de B, puis on les change de boîte. (a) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange la boîte A ne contienne que des boules rouges ? (b) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange chaque boîte ait retrouvé, en nombre de boules de chaque couleur, sa composition initiale.

II.17. Deux joueurs A et B jouent avec 2 dés. Chacun des deux choisit un nombre qu'il doit faire pour gagner. A choisit 7 et B choisit 6. B joue le premier et ensuite, (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un d'entre eux réussit à faire le chiffre qu'il a annoncé. Calculer la probabilité de succès de chaque joueur.

II.18. Soit $\Omega = \{\omega_i |\ 1 \leq i \leq 6\}$. On définit deux probabilités P_1 et P_2 telles que :

$P_1(\{\omega_1\}) = 3/10$; $P_1(\{\omega_2\}) = 1/5$; $P_1(\{\omega_3\}) = 1/20$; $P_1(\{\omega_4\}) = 3/20$; $P_1(\{\omega_5\}) = 1/20$; $P_1(\{\omega_6\}) = 1/4$

et, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$

$$P_2(\{\omega_i\}) = 1/6$$

On considère les événements $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Etudier l'indépendance de A et de B relativement à P_1, puis relativement à P_2.

Questions de cours

- Définition d'une tribu (ou σ-algèbre)
- Définition de deux évènements indépendants
- Théorème de transfert

Exercices

- Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes; puis, on suppose que : — Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6. — Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7. Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$. 1. Ecrire 2 relations entre un, $un+1$, vn, $vn+1$. 2. En déduire, une expression de chacune des suites en fonction de n.
- Posons $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur un ensemble Ω. Posons :

  $$\mathcal{I} = \{A_1 \cap A_2 |\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

  et

  $$\mathcal{U} = \{A_1 \cup A_2 |\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

  (1) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ sont elles des tribues ? Si oui pourquoi ? Sinon, donnez un contre-exemple.

  (2) Montrez que $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$

Questions de cours

- Définition de la variance
- Définition d'une fonction génératrice
- Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires

Exercices

- Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant $J_n + 1$ est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant $J_n + 1$ est 0.9 ; quelle est la probabilité $P_n + 1$ pour qu'elle fume le jour $J_n + 1$ en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?
- Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et soit $F \subset \Omega$. Montrez que

  $$\mathcal{A}_F = \{A \cap F | A \in \mathcal{A}\}$$

  est une tribu sur F. On l'appelle la tribu trace de $\mathcal{A}$ sur F.

Questions de cours

- Définition d'une fonction caractéristique
- Formule des probabilités totales
- Définition de la covariance

Exercices

- Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Qn = P(\bar{E_n})$.

  On suppose que : $P_1 = a$ et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $1/10$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $4/10$. Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n.
- Soit Ω dénombrable. Déterminez la tribu engendrée par $P = \{\{x\}|x \in \Omega\}$.

Questions de cours

- Définition de l'espérance
- Définition d'une mesure de probabilité
- Théorème de Bayes

Exercices

- Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds. On choisit un individu au hasard. Calculez la probabilité des évènements suivants : 1. Si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. 2. Si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. 3. Si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

  Dans cette même population, 35% des individus ont les cheveux bruns ou noirs, 25% châtains et 15% roux. Les allergies au soleil ne se déclarent pas de la même manière chez toutes ces personnes. On dit que 5% des bruns ou noirs y sont assujettis, 20% des châtains, 40% des blonds et 50% des roux. Supposons qu'un individu est allergique au soleil. Quelle est la probabilité qu'il soit blond ? roux ? châtain ?
- Prenons Ω et Π deux ensembles et $f : \Omega \to \Pi$ une application.
  (1) Montrez que si $\mathcal{A}$ est une tribu de Π alors $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A)|A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de Ω. On appelle cette tribu la <u>tribu image réciproque</u> de $\mathcal{A}$.
  (2) Montrez que pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Pi)$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$.

Questions de cours

- Définition d'une tribu (ou σ-algèbre)
- Définition de deux évènements indépendants
- Définition d'une probabilité conditionnelle
- Formule de Bayes

Exercices

- Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne. Le trimoteur peut voler si le moteur central ou les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ?
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesuré dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou ponctuellement) vers f. Montrez que f est mesurable.

Questions de cours

- Définition d'une tribu borélienne
- Définition d'une mesure de probabilité
- Définition d'un évènement et de la probabilité d'un évènement sur Ω, un univers fini

Exercices

- Soit $\Omega = \{\omega_i |\ 1 \leq i \leq 6\}$. On définit deux probabilités P_1 et P_2 telles que :

  $P_1(\{\omega_1\}) = 3/10$; $P_1(\{\omega_2\}) = 1/5$; $P_1(\{\omega_3\}) = 1/20$; $P_1(\{\omega_4\}) = 3/20$; $P_1(\{\omega_5\}) = 1/20$; $P_1(\{\omega_6\}) = 1/4$

  et, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$
  $$P_2(\{\omega_i\}) = 1/6$$
  On considère les événements $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Etudier l'indépendance de A et de B relativement à P_1, puis relativement à P_2.
- Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et soit $F \subset \Omega$. Montrez que
  $$\mathcal{A}_F = \{A \cap F | A \in \mathcal{A}\}$$
  est une tribu sur F. On l'appelle la tribu trace de $\mathcal{A}$ sur F.

Questions de cours

- Définition d'une fonction mesurable
- Formule des probabilités totales

Exercices

- Dans un jeu de 32 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer une dame» et «tirer un coeur» sont-ils indépendants ? Quelle est la probabilité de «tirer une dame ou un coeur» ?
- Soit Ω dénombrable. Déterminez la tribu engendrée par $P = \{\{x\} | x \in \Omega\}$.
- Prenons Ω et Π deux ensembles et $f : \Omega \to \Pi$ une application.
  (1) Montrez que si $\mathcal{A}$ est une tribu de Π alors $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de Ω. On appelle cette tribu la tribu image réciproque de $\mathcal{A}$.
  (2) Montrez que pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Pi)$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$.

Questions de cours

- Définition d'une fonction de masse sur Ω, un univers fini
- Propriété de σ-additivité d'une mesure de probabilité
- Définition d'une variable aléatoire discrète X, de la mesure de probabilité associée (ou fonction de masse de X).

Exercices

- Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds. On choisit un individu au hasard. Calculez la probabilité des évènements suivants : 1. Si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. 2. Si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. 3. Si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.
- Posons $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur un ensemble Ω. Posons :

  $$\mathcal{I} = \{A_1 \cap A_2 |\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

  et

  $$\mathcal{U} = \{A_1 \cup A_2 |\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

  (1) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ sont elles des tribues ? Si oui pourquoi ? Sinon, donnez un contre-exemple.

  (2) Montrez que $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$