Devoir maison n° 1

Exercice 1

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x + 2y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}(1, 1, 1)$.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution: E est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$ donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une base de E et en déduire la dimension de E. Faire de même pour F.

Solution: Soit $(x, y, z) \in E$. Alors $x + 2y + z = 0$ donc $z = -x - 2y$. Ainsi,

$$(x, y, z) = (x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2).$$

Donc $E = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -2))$. De plus, les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -2)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ donc $\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$ est une base de E et $\dim(E) = 2$.
F est engendré par le vecteur non nul $(1, 1, 1)$. Ce vecteur forme donc une base de F qui est de dimension 1.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (2x - 4y, x - 2y, 0, x - y - z - t).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Solution: Soient (x, y, z, t) et (x', y', z', t') deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$f(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t'))$ qui est égal à :

$(2\lambda x + 2x' - 4\lambda y - 4y', \lambda x + x' - 2\lambda x - 2y', 0, \lambda x + x' - \lambda y - y' - \lambda z - z' - \lambda t - t')$
Après simplification, on montre que cette même quantité est égale à :

$$\lambda f((x, y, z, t)) + f((x', y', z', t'))$$

2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Solution: Soit $(x, y, z, t) \in \text{Ker}(f)$. Alors :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases}$$

Les deux premières lignes sont les mêmes. On exprime x et t en fonction de y, z. On trouve alors $x = 2y$ et $t = y - z$.

Donc
$$(x,y,z,t)=(2y,y,z,y-z)=y(2,1,0,1)+z(0,0,1,-1)$$
Ces deux vecteurs étant libre, on peut affirmer que $\{(2,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Soit $(x,y,z,t)\in \mathrm{Im}(f)$. Alors :
$$f(x,y,z,t)=x(2,1,0,1)+y(-4,-2,0,-1)+z(0,0,0,-1)+t(0,0,0,-1)$$
Notons, $v_1=(2,1,0,1),\ \ v_2=(-4,-2,0,-1),\ \ v_3=(0,0,0,-1)$ On a donc
$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4).$$
Mais la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ ne forment pas une famille libre. Par contre, on a $v_3=v_4$ et que $2v_1+v_2+v_3=0$. Donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(v_1,v_3)$ et $\{v_1,v_3\}$ est libre donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{v_1,v_3\}$.

3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^4$?

Solution: Le vecteur $(2,1,0,1)$ est à la fois dans le noyau et l'image de f et n'est pourtant pas le vecteur nul donc $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)\neq\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ donc $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^4$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Solution: On a :
$$\begin{cases} f(1,0,0,0)=(2,1,0,1)\\ f(0,1,0,0)=(-4,-2,0,-1)\\ f(0,0,1,0)=(0,0,0,-1)\\ f(0,0,0,1)=(0,0,0,-1)\end{cases}$$
Ainsi, la matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&0&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons :
$$F=\{f\in E,\ f(0)=0\ \text{ et }\ f'(0)=0\}.$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

Solution: F est un sous ensemble de E. La fonction nulle, notée 0_E, est dans F. Soient $f,g\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{cases} f(0)=0\ \text{ et }\ f'(0)=0\\ g(0)=0\ \text{ et }\ g'(0)=0\end{cases}$$
Donc $(\lambda f+g)(0)=\lambda f(0)+g(0)=0$ et $(\lambda f+g)'(0)=\lambda f'(0)+g'(0)=0$ donc $\lambda f+g\in F$.
Ainsi, F est un sous espace vectoriel de E.

2. Soit G l'ensemble des fonctions affines de la forme $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que G est un sous espace vectoriel de E.

Solution: G est un sous ensemble de E. La fonction nulle est une fonction affine (avec $a = b = 0$). Soient $f, g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe $a, b, c, d \in R$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = cx + d \end{cases}$$

Et donc, pour tout $x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + g)(x) = (\lambda a + c)x + (\lambda b + d)$ donc $\lambda f + g$ est une fonction affine, c'est-à-dire que G est un sous espace vectoriel de E.

3. Montrer que $E = F \oplus G$.
Indication : pour tout $h \in E$, on cherchera à écrire $h(x) = f(x) + ax + b$ avec $f \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On utilisera le fait que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ pour déduire les valeurs de a et b.

Solution: Montrons que $E = F + G$. On raisonne par *analyse-synthèse*. Soit $h \in E$.

Analyse : Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $h = f + g$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + ax + b$. En dérivant cette égalité, on obtient $h'(x) = f'(x) + a$ et en évaluant en 0 les deux dernières égalités, on a $\begin{cases} h(0) = b \\ h'(0) = a \end{cases}$ donc $g(x) = ax + b = h'(0)x + h(0)$ et $f(x) = h(x) - g(x) = h(x) - h'(0)x - h(0)$.

Synthèse : Posons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto h'(0)x + h(0)$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) - h'(0)x - h(0)$. Alors par construction, $h = f + g$. De plus, $g \in G$ et $f \in F$.

Ainsi, on a montré que $E = F + G$.

Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $f \in F \cap G$. Alors $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ et il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$. On obtient $b = f(0) = 0$ et $a = f'(0) = 0$ donc $f = 0_E$.

Donc $E = F \oplus G$.

Exercice 4

Résoudre le système linéaire suivant en discutant suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2z & = & -4 \\ -x + y + (\alpha + 4)z & = & 10 \\ x - \alpha y - 5z & = & -10 \end{cases}$$

Solution: On remarque que le système s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & \alpha + 4 \\ 1 & -\alpha & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le déterminant de la matrice du système :

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & \alpha+4\\ 1 & -\alpha & -5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & \alpha+2\\ 0 & -\alpha & -3\end{pmatrix} = 1\times\det\begin{vmatrix}1 & \alpha+2\\ -\alpha & -3\end{vmatrix} = -3+\alpha(\alpha+2) = \alpha^2+2\alpha-3$$

On veut savoir pour quelles valeurs de α le déterminant est nul. En effet, un déterminant nul implique une équation redondante. Dans le cas contraire on devra inverser la matrice pour trouver les solutions.

On calcule donc le discrimant du polynôme en α : $\Delta = 2^2 - 4\times(-3) = 16$. Les solutions sont donc

$$\frac{-2-4}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad \frac{-244}{2} = 1$$

Donc si $\alpha \neq 1$ et -3 alors le déterminant de la matrice du système est non nul. On peut donc inverser cette matrice. Pour cela on calcule la comatrice :

$$\mathrm{Com} = \begin{pmatrix}\alpha^2+2\alpha-3 & 1-\alpha & 1-\alpha\\ 2\alpha & -3 & \alpha\\ -2 & 2-\alpha & 1\end{pmatrix}$$

Or on a la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{Com}(A)$

Donc

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & \alpha+4\\ 1 & -\alpha & -5\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+3)}\begin{pmatrix}\alpha^2+2\alpha-3 & 2\alpha & -2\\ 1-\alpha & -3 & 2-\alpha\\ 1-\alpha & \alpha & 1\end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & \alpha+4\\ 1 & -\alpha & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\ 10\\ -10\end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & \alpha+4\\ 1 & -\alpha & -5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-4\\ 10\\ -10\end{pmatrix}$$

D'où les solutions :

$$\begin{cases} x &= \frac{-4a}{a+3}\\ y &= \frac{6}{a+3}\\ z &= \frac{6}{a+3}\end{cases}$$

Maintenant si $\alpha = 1$, on a le système :

$$\begin{cases} x-2z &= -4\\ -x+y+5z &= 10\\ x-y-5z &= -10\end{cases}$$

La deuxième et la troisième lignes sont les mêmes on a donc :

$$\begin{cases} x &= -4+2z\\ y &= 6-3z\end{cases}$$

Les solutions sont donc les vecteurs de la forme $(-4+2z, 6-3z, z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

Enfin, si $\alpha = -3$, on a le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2z & = & -4 \\ -x + y + z & = & 10 \\ x + 3y - 5z & = & -10 \end{array} \right.$$

La somme $L_3 - 3L_2$ donne :

$$4x - 8z = -40 \Leftrightarrow x - 2z = -10$$

ce qui contredit la ligne L_1. Il n'y a donc aucune solution.