Devoir maison n° 2

Les réponses sans le détail des étapes de calculs ne seront pas corrigées.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^n$

1. Calculer toutes les dérivées de P jusqu'à la $(n+1)$-ième dérivée.

Solution:

$$\begin{array}{ccc} P(x) = x^n, & P'(x) = n\ x^{n-1}, & P''(x) = n(n-1)\ x^{n-2}, \\ P'''(x) = n(n-1)(n-2)\ x^{n-3}, & \dots & \dots \\ P^{(n-1)}(x) = \big(n(n-1)\cdots 2\big)\ x, & P^{(n)}(x) = \big(n(n-1)\cdots 1\big), & P^{(n+1)}(x) = 0 \end{array}$$

2. En déduire un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre n sur un intervalle $[a, a+b]$ quelconque, en expliquant pourquoi celui-ci est possible.

Solution: Ce développement est possible car P est un polynôme, donc infiniment dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. En utilisant les dérivées successives, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} P(a+b) &= P(a) + \frac{P'(a)}{1!}\ b + \frac{P''(a)}{2!}\ b^2 + \frac{P'''(a)}{3!}\ b^3 + \cdots + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\ b^{n-1} \\ &\quad + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\ b^n + \frac{P^{(n+1)}(a+\theta b)}{(n+1)!}\ b^{n+1} \\ &= a^n + \frac{n\ a^{n-1}}{1!}\ b + \frac{n(n-1)\ a^{n-2}}{2!}\ b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)\ a^{n-3}}{3!}\ b^3 + \cdots + \frac{\big(n(n-1)\cdots 2\big)\ a}{(n-1)!}\ b^{n-1} \\ &\quad + \frac{\big(n(n-1)\cdots 1\big)}{n!}\ b^n + 0 \end{aligned}$$

3. A partir de ce qui précède, montrer la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = a^n + nba^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} b^2 a^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!} b^k a^{n-k} + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Solution: Il suffit de remplacer $P(a+b)$ par $(a+b)^n$ dans la formule ci dessus :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \frac{n\ a^{n-1}}{1!}\ b + \frac{n(n-1)\ a^{n-2}}{2!}\ b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)\ a^{n-3}}{3!}\ b^3 + \cdots + \frac{(n(n-1)\cdots 2)\ a}{(n-1)!}\ b^{n-1} \\ &\quad + \frac{(n(n-1)\cdots 1)}{n!}\ b^n + 0 \\ &= a^n + n\ a^{n-1}\ b + \frac{n(n-1)}{2!}\ a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!}\ ab^{n-1} \\ &\quad + \frac{n!}{n!}\ b^n + 0 \\ &= a^n + n\ a^{n-1}\ b + \frac{n(n-1)}{2!}\ a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ a^{n-3}b^3 + \cdots + n\ ab^{n-1} + b^n + 0\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) - x}{\exp\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) + 1}$$

Le but de cet exercice est de trouver les asymptotes de f en $+\infty$ et en $-\infty$

1. Posons $h = \frac{1}{x}$. Montrez que

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{h \cdot \exp\left(h \cdot \dfrac{1-h}{1+h^2}\right) - 1}{\exp\left(h \cdot \dfrac{1-h}{1+h^2}\right) + 1}$$

Solution: On a :

$$\exp\left(\frac{\dfrac{1}{h} - 1}{\dfrac{1}{h^2} + 1}\right) = \exp\left(\frac{\dfrac{1-h}{h}}{\dfrac{1+h^2}{h^2}}\right) = \exp\left(h \cdot \frac{1-h}{1+h^2}\right)$$

Donc

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\exp\left(h \cdot \dfrac{1-h}{1+h^2}\right) - \dfrac{1}{h}}{\exp\left(h \cdot \dfrac{1-h}{1+h^2}\right) + 1} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h \cdot \exp\left(h \cdot \dfrac{1-h}{1+h^2}\right) - 1}{\exp\left(h \cdot \dfrac{1-h}{1+h^2}\right) + 1}$$

2. Calculer le $DL_4(0)$ de $(1+h)^{-1}$ puis de $\exp(h)$.

Solution: Les formules de Taylor-Young nous donnent :

$$(1+h)^{-1} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4) \tag{1}$$

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + o(h^4) \tag{2}$$

3. En déduire le $DL_4(0)$ de $(1+h^2)^{-1}$ puis montrer que :

$$\exp\left(h \cdot \frac{1-h}{1+h^2}\right) = 1 + h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{11}{6}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + o(h^4)$$

Solution: En remplaceant h par h^2 dans (1) on a :

$$(1+h^2)^{-1} = 1 - h^2 + h^4 + o(h^4)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\exp\left(h \cdot \frac{1-h}{1+h^2}\right) &= \exp\left(h \cdot (1-h) \cdot \left(1 - h^2 + h^4 + o(h^4)\right)\right)\\ &= \exp\left((h-h^2) \cdot \left(1 - h^2 + h^4 + o(h^4)\right)\right)\\ &= \exp\left(h - h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)\right)\end{aligned}$$

Donc en remplaceant h par $h - h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)$ dans (2) :

$$\exp\left(h \cdot \frac{1-h}{1+h^2}\right) = 1 + \left(h - h^2 - h^3 + h^4\right) + \frac{1}{2}\left(h^2 - 2h^3 - h^4\right) + \frac{1}{3!}\left(h^3 - 3h^4\right) + \frac{1}{4!}h^4 + o(h^4)$$

D'où

$$\exp\left(h \cdot \frac{1-h}{1+h^2}\right) = 1 + h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{11}{6}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + o(h^4) \tag{3}$$

4. En réutilisant le $DL_4(0)$ de $(1+h)^{-1}$ et celui de la question précédente, calculez le $DL_4(0)$ de

$$\frac{1}{1 + \exp\left(h \cdot \frac{1-h}{1+h^2}\right)}$$

Solution: On fait une composée de $DL_4(0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\exp\left(h\cdot\dfrac{1-h}{1+h^2}\right)} &= \frac{1}{2+h-\frac{1}{2}h^2-\frac{11}{6}h^3+\frac{1}{4!}h^4+o(h^4)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{4}h^2-\frac{11}{12}h^3+\frac{1}{2\times 4!}h^4+o(h^4)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}h-\frac{1}{4}h^2-\frac{11}{12}h^3+\frac{1}{2\times 4!}h^4\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}h^3-\frac{11}{12}h^4+\frac{1}{16}h^4\right)-\left(\frac{1}{8}h^3-\frac{3}{16}h^4\right)+\frac{1}{16}h^4\right] \text{d'après (1)} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}h+\frac{1}{4}h^2+\frac{13}{48}h^3-\frac{5}{16}h^4+o(h^4)
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{1+\exp\left(h\cdot\dfrac{1-h}{1+h^2}\right)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}h+\frac{1}{4}h^2+\frac{13}{48}h^3-\frac{5}{16}h^4+o(h^4) \tag{4}$$

5. Calculer grâce à la question 3 le $DL_4(0)$ de

$$h\cdot\exp\left(h\cdot\frac{1-h}{1+h^2}\right)-1$$

Solution: On remplace juste le $DL_4(0)$ de $\exp\left(h\cdot\dfrac{1-h}{1+h^2}\right)$ (donc la formule (3)) dans l'expression, et on obtient :

$$h\cdot\exp\left(h\cdot\frac{1-h}{1+h^2}\right)-1 = -1+h+h^2-\frac{1}{2}h^3-\frac{11}{6}h^4+\frac{1}{4!}h^5+o(h^5)$$

et comme on veut un $DL_4(0)$, on réduit un ordre :

$$h\cdot\exp\left(h\cdot\frac{1-h}{1+h^2}\right)-1 = -1+h+h^2-\frac{1}{2}h^3-\frac{11}{6}h^4+o(h^4) \tag{5}$$

6. En déduire le $DL_4(0)$ de $h\times f(1/h)$.

Solution: On utilise les formules (4) et (5) que l'on remplace dans l'expression trouvée dans la question (1).

$$\begin{aligned}
hf(1/h) &= \frac{h\cdot\exp\left(h\cdot\dfrac{1-h}{1+h^2}\right)-1}{\exp\left(h\cdot\dfrac{1-h}{1+h^2}\right)+1}\\
&= \left(h\cdot\exp\left(h\cdot\frac{1-h}{1+h^2}\right)-1\right)\cdot\frac{1}{\exp\left(h\cdot\dfrac{1-h}{1+h^2}\right)+1}\\
&= \left(-1+h^2-\frac{1}{2}h^3-\frac{11}{6}h^4+o(h^4)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}h+\frac{1}{4}h^2+\frac{13}{48}h^3-\frac{5}{16}h^4+o(h^4)\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}h-\frac{25}{48}h^3+\frac{1}{24}h^4+o(h^4)\right)
\end{aligned}$$

7. Remplacer h par $\frac{1}{x}$ pour revenir à $f(x)$. Retrouvez un développement asymptotique (donc quand x tend vers $+\infty$ et en $-\infty$) de f de la forme :

$$f(x) = a_1x + a_2 + a_3\frac{1}{x} + a_4\frac{1}{x^2} + a_5\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

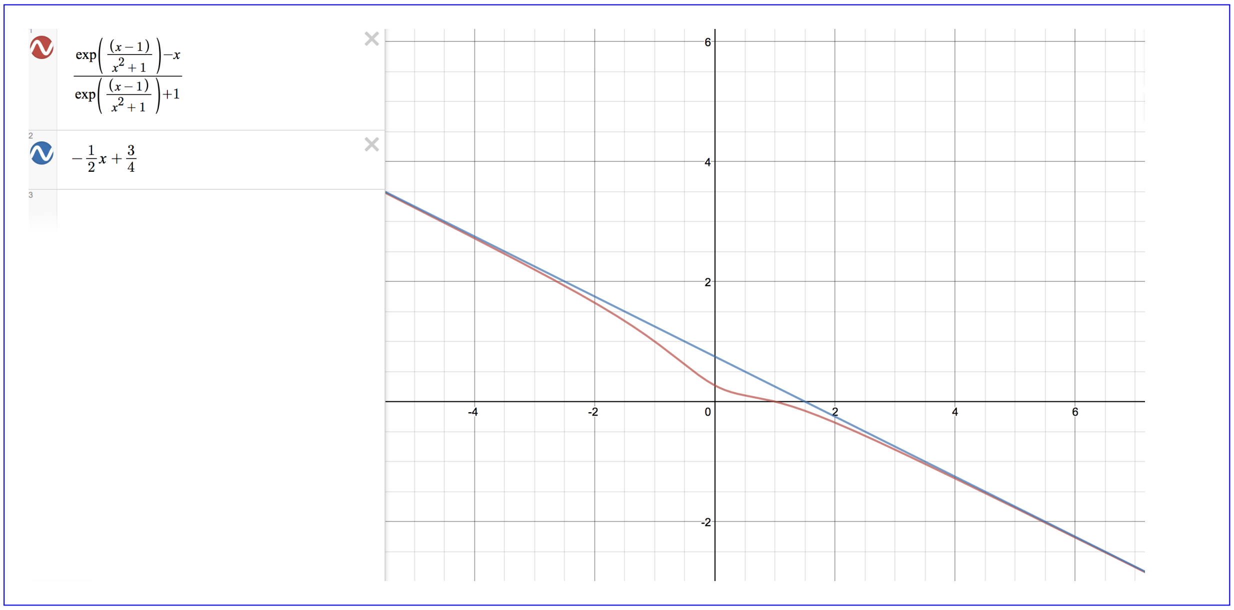
où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels.

Solution: Il suffit de remplacer $\frac{1}{h}$ par x dans la question précédente. On obtient alors :

$$f(x) = x\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{25}{48}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-\frac{25}{48}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

8. Les parties en $\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, deviennent négligeables quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. En déduire l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution: Quand x devient grand, les parties en $\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, deviennent négligeables. Donc en $+\infty$ et $-\infty$, la fonction f est proche de la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$. L'asymptote oblique est donc la même en $+\infty$ et $-\infty$. C'est la droite d'équation : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$
Une calculatrice graphique donnera le résultat suivant :



Exercice 3
Calculez le $DL_5(0)$ de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

Solution: On a, grâce à la formule de Taylor-Young :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

Donc

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

On veut donc un $DL_5(0)$ de

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)$$

Or, grâce à la formule de Taylor-Young :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} + o(h^5)$$

Donc en remplaceant le h par $-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{(3!)^2}\right) + o(x^5)$$