Partiel du 13 novembre 2019

Toute question sans rédaction ne sera pas corrigée. Des calculs non expliqués, des variables non définies ou des égalités impossibles (du type "Vecteur" = "Nombre") entraîneront systématiquement une perte de point.

Exercice 1 **[3 points]**

Résoudre suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} mx + (m-1)y &= m+2 \\ (m+1)x + my &= 5m+3 \end{cases}$$

Solution: On remarque que le système s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le déterminant de la matrice du système :

$$\det \begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m \end{pmatrix} = 1$$

On veut savoir pour quelles valeurs de m le déterminant est nul. En effet, un déterminant nul implique une équation redondante. Dans le cas contraire on devra inverser la matrice pour trouver les solutions. Ici le déterminant ne dépend pas de m et est toujours égal à 1. Donc il y a toujours une solution donnée par l'inverse de la matrice du système. On peut donc inverser cette matrice. Pour cela on calcule la comatrice :

$$\text{Com} = \begin{pmatrix} m & -m-1 \\ -m+1 & m \end{pmatrix}$$

Or on a la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\,\text{Com}(A)$

Donc

$$\begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m & -m+1 \\ -m-1 & m \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -m+1 \\ -m-1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix}$$

D'où les solutions :

$$\begin{cases} x &= -4m^2 + 4m + 3 \\ y &= 4m^2 - 2 \end{cases}$$

Exercice 2 **[13 points]**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x - 2y, 2x - y + 3z, 3x + 2y + 8z)$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. [1 point]

Solution: Si on note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2. (a) Donnez une base et la dimension du noyau de f. [2 points]

Solution:

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x, y, z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ 2x - y + 3z & = 0 \\ 3x + 2y + 8z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ 3y + 3z & = 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 8y + 8z & = 0 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y + z & = 0 \quad {\scriptstyle \text{car } L_3 = L_2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2z \quad {\scriptstyle \text{En remplaçant } y \text{ dans } L_1} \\ y & = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $(x, y, z) = (-2z, -z, z)$ et donc

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(-2z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Donc $\{(-2, -1, 1)\}$ forme une base du noyau qui est donc de dimension 1.

(b) Donnez la dimension et une base de l'image de f. [2 points]

Solution: D'après le théorème du rang, on a :

$$\mathsf{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$$

Il nous suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires (donc libres) dans l'image de f et il formeront une base de l'image. or

$$f(1,0,0) = (1,2,3)$$

et

$$f(0,1,0) = (-2,-1,2)$$

sont deux vecteurs non colinéaires et sont dans l'image de f par définition. Donc la famille $\{f(e_1), f(e_2)\}$ forme une base de l'image.

3. Montrer que la famille formée de l'union de la base du noyau et de celle de l'image forme une base de $\mathbb{R}^3$. On notera cette base $\mathcal{B}$. [2 points]

Solution: D'après la question précédente, il suffit de montrer que la famille composé des bases trouvées précédement $\{(-2,-1,1),(1,2,3),(-2,-1,2)\}$ est libre. Il suffit donc de calculer le déterminant de ces vecteurs écrits en colonnes :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \\ \end{matrix} = 7 - 5 \times 2 = -3 \neq 0$$

Donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Ecrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$. [2 points]

Solution: Notons :

$$u_1 = (-2,-1,1) \qquad u_2 = (1,2,3) \qquad u_3 = (-2,-1,2)$$

Donc $\mathcal{B}$ est la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Calculons alors l'image de chacun de ces vecteurs par f.

- $f(u_1) = 0$ car $u_1 \in \mathrm{Ker}(f)$
- $f(u_2) = (-3,9,31) = 7u_2 + 5u_3$
- $f(u_3) = (0,3,8) = 2u_2 + u_3$

D'où

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Donnez l'inverse de la matrice P formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ écrits en colonne. [2 points]

Solution: D'après la question 3., $\det P = -3$. En calculant on a :

$${}^t\,\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\operatorname{Com} P = \begin{pmatrix} -7/3 & 8/3 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 5/3 & -7/3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calculer $P^{-1}AP$. Que remarque-t-on ? [2 points]

Solution: Après calculs on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 **[6 points]**

On pose $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. L'espace des polynômes de degré égal à 2 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$? [1 point]

Solution: Un sous espace vectoriel doit contenir l'élément neutre de l'espace ambiant, ici le ploynôme nul. Cependant le polynôme nul est de degré 0 et donc il n'est pas de degré 2. Cet espace n'est donc pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $\Pi = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X) = \lambda + (\lambda - \mu)X + \mu X^2, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Montrez que Π est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et donnez en une base et la dimension. [2 points]

Solution: Soient P et Q deux polynômes de Π. Fixons alors $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$P(X) = \lambda_1 + (\lambda_1 - \mu_1)X + \mu_1 X^2$$

$$Q(X) = \lambda_2 + (\lambda_2 - \mu_2)X + \mu_2 X^2$$

Alors

$$\begin{aligned} P(X) + Q(X) &= \lambda_1 + (\lambda_1 - \mu_1)X + \mu_1 X^2 + \lambda_2 + (\lambda_2 - \mu_2)X + \mu_2 X^2 \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \mu_1 + \lambda_2 - \mu_2)X + (\mu_1 + \mu_2)X^2 \in \Pi \end{aligned}$$

par définition de Π. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda P(X) &= \lambda(\lambda_1 + (\lambda_1 - \mu_1)X + \mu_1 X^2) \\ &= \lambda\lambda_1 + \lambda(\lambda_1 - \mu_1)X + \lambda\mu_1 X^2 \in \Pi \end{aligned}$$

par définition de Π. Donc Π est un sous espace vectoriel de E.

Cherchons maintenant une base de Π. Soit $P(X) = \lambda + (\lambda - \mu)X + \mu X^2$ un élément de Π. Alors :

$$\begin{aligned} P(X) &= \lambda + (\lambda - \mu)X + \mu X^2 \\ &= \lambda + \lambda X - \mu X + \mu X^2 \\ &= \lambda(1 + X) + \mu(-X + X^2) \end{aligned}$$

Donc la famille $\{1 + X, X + X^2\}$ engendre Π. Donc il suffit de montrer que c'est une famille libre pour en déduire que c'est une base de E. Il est clair qu'il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$1 + X \neq \alpha(X + X^2)$$

Donc la famille est libre et donc c'est une base de Π. La dimension de Π est donc 2.

3. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{array}$$

Montrez que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels en utilisant deux méthodes différentes.

[3 points]

Solution:

— **Méthode 1 :** On va écrire la matrice de f dans les bases canoniques $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$ et $\mathcal{B}' := \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Or $f(1) = (1,0,0)$, $f(X) = (0,1,0)$, $f(X^2) = (0,0,1)$ On a alors :

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\det(\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)) = 1/2 \neq 0$$

Donc f est un isomorphisme.

— **Méthode 2 :** On va montrer que f est injective : Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Supposons que $P \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(P) = 0$

$$\Leftrightarrow (P(0), P'(0), P''(0)) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} P(0) & = 0 \\ P'(0) & = 0 \\ P''(0) & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a_0 & = 0 \\ a_1 & = 0 \\ a_2/2 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow P \text{ est le polynôme nul}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. Donc f est une application injective d'un espace de dimension 3 dans un espace de dimension 3. Alors f est un isomorphisme.