Examen du 18 décembre 2019

Toute question sans rédaction ne sera pas corrigée. Des calculs non expliqués, des variables non définies ou des égalités impossibles entraîneront systématiquement une perte de points. La qualité des explications sera prise en compte. [2 points]

Exercice 1 [7 points]

1. Donner le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5 . [1,5 point]
2. Soit $f(x) = \exp(x)\cos(x)$.
   (a) Calculer un DL de f à l'ordre 4 en 0. [1 point]
   (b) En déduire un DL de $g(x) = \exp(x)(\cos(x) - \sin(x))$ en 0 à l'ordre 3. [0,5 point]
3. Calculer l'intégrale double $\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y}$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1,\ x \geq 1,\ x + y \leq 4\}$ [1,5 point]
4. Soit I l'intégrale double $I = \iint_D x^2 + y^2\,dx\,dy$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$
   (a) Après un changement de variables en coordonnées polaires, montrer que [1 point]
   $$D = \{0 \leq r \leq 2\sin(\theta) \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi\}$$
   (b) En admettant que $\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$, calculer I. [1,5 point]

Solution:

1. D'après Taylor-Young, on a :
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$
Or on remarque que
$$\tan(x) = \sin(x)\,(\cos(x))^{-1}$$
Or $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$
Donc :
$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + o(x^5)\right)\\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + o(x^5)\right)\\ &= x + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + x^5\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24}\right) + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

2. (a) $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
   Donc on a :
$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + x + x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + x^4\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{24}\right) + o(x^4)\\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\end{aligned}$$

(b) On remarque que $f'(x) = g(x)$. Donc

$$g(x) = 1 - x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

3. Le domaine D se réécrit : $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4 - x,\ 1 \leq x \leq 3\}$. On peut donc réécrire l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dx\ dy}{x+y} &= \int_1^3 \left(\int_1^{4-x} \frac{1}{x+y}\ dy \right)\ dx \\
&= \int_1^3 \Big[\ln(x+y) \Big]_1^{4-x}\ dx \\
&= \int_1^3 \Big(\ln(4) - \ln(x+1) \Big)\ dx \\
&= \int_1^3 \ln(4)\ dx - \int_1^3 \ln(x+1)\ dx \\
&= 2\ln(4) - \Big[(x+1)\ln(x+1) - x \Big]_1^3 \\
&= 2\ln(4) - \Big(4\ln(4) - 3 - (2\ln(2) - 1) \Big) = 4\ln(2) - \Big(6\ln(2) - 2 \Big) \\
&= 2 - 2\ln(2)
\end{aligned}$$

4. Soit I l'intégrale double $I = \iint_D x^2 + y^2\ dx\ dy$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$

(a) Après le changement de variables en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases},$$

la condition dans D se réécrit :

$$r^2 - 2r\sin(\theta) \leq 0 \Leftrightarrow r - 2\sin(\theta) \leq 0 \Leftrightarrow r \leq 2\sin(\theta)$$

Or $r \geq 0$, donc $2\sin(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$. On a alors :

$$D = \{0 \leq r \leq 2\sin(\theta) \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

(b) On calcule alors la double intégrale en utilisant les bornes trouvées dans la question précédente et en faisant le changement de variable dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 + y^2\ dx\ dy \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\sin(\theta)} r^2 \cdot r\ dr \right)\ d\theta \\
&= \int_0^\pi \Big[\frac{r^4}{4} \Big]_0^{2\sin(\theta)}\ d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{(2\sin(\theta))^4}{4}\ d\theta \\
&= 4\int_0^\pi \sin^4(\theta)\ d\theta \\
&= 4\int_0^\pi \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(4x)}{4} - 2\sin(2x) + 3x \Big]_0^\pi \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 2 **[3 points]**

A l'aide d'un développement limité, On va chercher l'asymptote oblique, en $\pm\infty$, de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

et déterminer la position relative de la courbe et de cette asymptote.

1. Quelles sont les limites quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$. [0,5 point]
2. On pose $h = 1/x$. Calculez $f(1/h)$ en fonction de h. [0,5 point]
3. (a) Donner le développement limité de $\exp(x)$ en 0 à l'ordre 3, puis celui de $h \times f(1/h)$ [0,5 point]
   (b) Ecrire la formule de $f(1/h)$ qui découle de la question précédente. [0,5 point]
   (c) En déduire, la formule de $f(x)$, en remplaçant $1/h$ par x . [0,5 point]
4. En déduire, en éliminant les termes négligeables, la formule de l'asymptote oblique en $\pm\infty$. (On rappelle qu'une asymptote oblique est une fonction affine de la forme "$ax+b$") [0,5 point]
5. En soustrayant à $f(x)$ la fonction affine asymptotique, dire si la courbe de f est au dessus ou en dessous de l'asymptote. [0,5 point]

Solution:

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
2. $f(1/h) = \dfrac{(1/h)^2-1}{1/h}\exp(h) = \dfrac{1}{h} \times (1-h^2)\exp(h)$
3. (a) D'après la Formule de Taylor-Young, on a le développement limité de exp en 0 : $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
   Donc, en remplaçant dans la formule précédente, on a :
   $$\begin{aligned} h \times f(1/h) &= (1-h^2)\exp(h) \\ &= (1-h^2)\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) \\ &= 1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{5h^3}{6} + o(h^3) \end{aligned}$$
   (b) En divisant par h des deux côtés on a : $f(1/h) = \dfrac{1}{h} + 1 - \dfrac{h}{2} - \dfrac{5h^2}{6} + o(h^2)$
   (c) On remplace dans la formule précédente : $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{5}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
4. Les termes en $\frac{1}{x^n}$, pour $n \geq 1$, tendent vers 0 quand x tend vers l'infini. Donc l'asymptote de f est la droite d'équation $y = x + 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. On soustraie l'équation de l'asymptote à $f(x)$:
   $$f(x) - (x+1) = -\frac{1}{2x} - \frac{5}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
   Or en $+\infty$ le terme dominant est $-\frac{1}{2x}$ qui est négatif, donc la courbe de f est en dessous de l'asymptote et en $-\infty$ le terme dominant est $-\frac{1}{2x}$ qui est positif, donc la courbe de f est au dessus de l'asymptote.

Exercice 3 **[5 points]**

1. Calculer la limite : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ [1 point]
2. Calculer la limite : $\lim_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$ [1,5 point]
3. (a) Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. [1,5 point]

   (b) En déduire, en se rappelant que $a^y = \exp(y\ln(a))$, la limite : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ [1 point]

Solution:

1. D'après la formule de Taylor-Young :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

   Donc en remplaçant dans la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1$$

2. Comme la limite est en 1, on se ramène à une limite en 0 en posant $h = x-1$ (donc $x = h+1$) :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)\ln(h+1)}{(h+1)^2-1} = \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)\ln(h+1)}{h^2+2h}$$

   Or d'après la formule de Taylor-Young : $\ln(h+1) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$
   Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(h+1)\ln(h+1)}{h^2+2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)}{h^2+2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h^2+2h} \\ &= \frac{1}{2} \text{ , en prenant la limite des termes de plus bas degré}\end{aligned}$$

3. (a) Dans la question 1., on a le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\sin(x)}{x}$ et dans la question 2. celui de $\ln(1+h)$: $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ et $\ln(h+1) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$
   En remplaçant donc h par $\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ dans le développement limité de $\ln(1+h)$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

   (b) D'après le rappel : $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)$
   D'où :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{x}{6} + o(x)\right) = 1\end{aligned}$$

Exercice 4 **[5 points]**

Le but de cet exercice est de la calculer l'aire d'une astroïde (voir la figure ci-contre). Elle est donnée par la courbe :

$$(x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t)) \qquad \text{pour } t \in [0, 2\pi]$$

On pose

$$\omega = x\ dy - y\ dx$$

Autrement dit : $\omega(t) = x(t)\ \frac{\partial y}{\partial t}(t) -\ y(t)\frac{\partial x}{\partial t}(t)$. On va utiliser le théorème de Green-Riemann pour cela. On note D le domaine orange qui représente un quart de l'astroïde. C'est ce domaine que l'on va calculer.

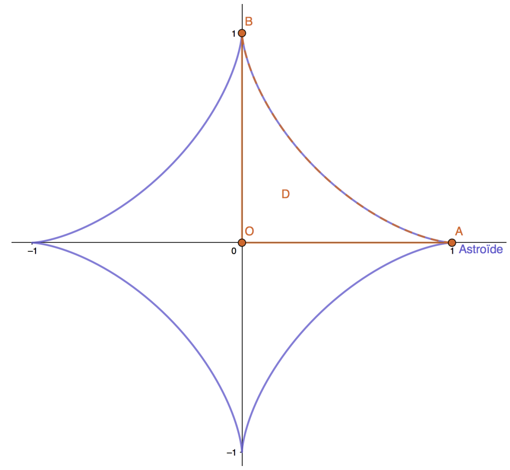

FIGURE 1 – Graphe d'une Astroïde

1. (a) Quelle intégrale double donne l'aire de D ? [0,5 point]
   (b) Donnez la formule de Green-Riemann. En utilisant cette formule, dire quelle intégrale curviligne I sur la courbe orange est égale à l'intégrale double de la question précédente (on peut penser à utiliser ω). [1 point]
2. Donnez la formule de $\omega(t)$ en fonction de t. [0,5 point]
3. En utilisant les formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

   Montrez que

$$\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{1}{8}(\cos(4t) - 1)$$

   [0,5 point]
4. On va calculez l'intégrale curviligne sur $\mathscr{C}$ de ω

$$\int_{\mathscr{C}} \omega$$

   (a) En séparant cette intégrale en trois morceaux, montrez qu'elle se réduit à l'intégrale entre A et B le long de l'astroide. Exprimez cette intégrale en fonction de t. [1 point]
   (b) Calculez la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(4t) - 1)dt$$

   et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathscr{C}} \omega$ (Les questions 2. et 3. peuvent aider). [1 point]
5. En déduire l'aire de l'astroïde. [0,5 point]

Solution:

1. (a) Si on note $\mathscr{A}_D$ l'aire de D, alors

$$\mathscr{A}_D = \iint_D dx\ dy$$

(b) Formule de Green-Riemann :

$$\int_{\mathscr{C}} f \ dx + g \ dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \ dx \ dy$$

D'où,

$$\mathscr{A}_D = \iint_D \ dx \ dy = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{C}} \omega$$

2. Il suffit de calculer directement :

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= x(t) \ \frac{\partial y}{\partial t}(t) - y(t) \ \frac{\partial x}{\partial t}(t) \\
&= \cos^3(t) \cdot 3\cos(t)\sin^2(t) + \sin^3(t) \cdot 3\sin(t)\cos^2(t) \\
&= 3\cos^4(t)\sin^2(t) + 3\sin^4(t)\cos^2(t) \\
&= 3\cos^2(t)\sin^2(t)\Big(\sin^2(t) + \cos^2(t) \Big) \\
&= 3\cos^2(t)\sin^2(t)
\end{aligned}$$

3. On remplace par les formules :

$$\begin{aligned}
\sin^2(t)\cos^2(t) &= \frac{1+\cos(2t)}{2} \cdot \frac{1-\cos(2t)}{2} \\
&= \frac{(1+\cos(2t))(1-\cos(2t))}{4} \\
&= \frac{1}{4}\Big(1 - \cos^2(2t)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1+\cos(4t)}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(\cos(4t) - 1 \Big)
\end{aligned}$$

4. (a)

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BO} \omega + \int_{OA} \omega$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{BO} \omega &= \int_{BO} x \ dy - \int_{BO} y \ dx \\
&= 0 - \int_{BO} y \ dx \text{ , car } x = 0 \text{ sur le segment } BO \\
&= 0 \text{ , car } dx = 0 \text{ sur le segment } BO
\end{aligned}$$

Et de même $\int_{OA} \omega = 0$ car $y = dy = 0$ sur le segment AO. D'où

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_A^B \omega = \int_0^{\pi/2} \omega(t) dt$$

puisque $t = 0$ en A et $t = \pi/2$ en B

(b) On calcule directement puisque $\int \cos(4x)dx = \frac{\sin(4x)}{4}$:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(4t) - 1)dt = \Big[\frac{\sin(4x)}{4} - t\Big]_0^{\pi/2} = \pi/2$$

Or d'après la question précédente puis les questions 2. et 3. :

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_0^{\pi/2} \omega(t)dt = \int_0^{\pi/2} 3\cos^2(t)\sin^2(t) = 3\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}\Big(\cos(4t) - 1\Big) = \frac{3\pi}{16}$$

5. D'après la question 1. :

$$\mathscr{A}_D = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}} \omega = \frac{3\pi}{32}$$

Donc l'aire de l'astroïde est

$$4 \times \mathscr{A}_D = \frac{3\pi}{8}$$