Interrogation du 21/11

1. Donner le théorème de Taylor-Lagrange et le reste de Lagrange.

> **Solution:** Si f est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, a+h]$ de n-ième dérivée continue et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle $]a, a+h[$, alors il existe $\theta \in]0, 1[$:
>
> $$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n(h)$$
>
> où $R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$

2. Donner le théorème de Taylor-Young et le reste de Young.

> **Solution:** Si f est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, a+h]$ de n-ième dérivée continue et $n+1$ en a, alors il existe une fonction ε telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et :
>
> $$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n(h)$$
>
> où $R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\varepsilon(h)$

3. Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0, h]$, $h \in \mathbb{R}$.

> **Solution:** Il existe ε une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et :
>
> $$\cos(h) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\varepsilon(x)$$

Interrogation du 26/11

1. Donnez la définition d'un dévelopement limité. [1 point]

Solution: On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

où $o((x-a)^n)$ est défini par :

$$\lim_{x \to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$$

2. Calclulez le DL suivant à l'ordre 5 en 0 :

   (a) $f(x) = \exp(-x)$ [1 point]

   Solution:
   $$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

   (b) $g(x) = \cos^2(x)$ (produit de DL) [1,5 point]

   Solution:
   $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$
   Donc
   $$\cos^2(x) = \cos(x)\cos(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5)$$

   (c) $h(x) = \exp(\sin(x))$ à l'ordre 3 (composée de DL) [1,5 point]

   Solution:
   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
   et
   $$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
   et
   $$h(x) = \exp \circ \sin(x)$$

Donc

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \exp(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \quad \text{donc on cherche bien un DL de } \exp \text{ en } 0 \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Interrogation du 28/11

1. Donnez la définition d'un dévelopement limité. [1 point]

Solution: On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

où $o((x-a)^n)$ est défini par :

$$\lim_{x \to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$$

2. Calclulez le DL suivant à l'ordre 3 en 0 de $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ sachant que [1,5 point]

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

Solution: On remarque que

$$\tanh(x) = \sinh(x)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^{-1}$$

Or $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ Donc

$$\begin{aligned}
\tanh(x) &= \sinh(x)(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \\
&= x + x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

3. Calculez la limite : [1 point]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

Solution: On a :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

4. Soit $f(x) = \exp(x)\cos(x)$.

   (a) Calculez un DL de f à l'ordre 4 en 0. [1 point]

   Solution:

   $$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

   Donc

   $$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) + x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{24}\right) + o(x^4) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

   (b) En déduire un DL de $g(x) = \exp(x)(\cos(x) - \sin(x))$ en 0 à l'ordre 3. [0,5 point]

   Solution: on remarque que $f'(x) = g(x)$. Donc

   $$g(x) = 1 - x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$