Espaces vectoriels : Feuille d'exercices I

Exercice 1

Posons $E = \mathbb{R}^3$. Les familles de vecteurs suivantes sont elles libres et/ou génératrices ?

(a) $(0, 2, -1)$, $(2, -3, 2)$

(b) $(1, 0, 3)$, $(2, -1, 2)$, $(5, 0, 3)$

(c) $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(4, 3, 2)$

(d) $(0, 3, 0)$, $(-1, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$

Exercice 2

(a) Montrez que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 6, noté $\mathbb{R}^6[X]$ est un espace vectoriel.

(b) Montrez que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 6, qui s'annulent en 0, est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^6[X]$.

Exercice 3

(a) Montrez que l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.

(b) Que pensez vous de l'union de deux sous espaces vectoriels ?

(c) On considère, pour F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, l'ensemble :

$$F + G := \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$$

Montrez que $F + G$ est un sous espace vectoriel de E.

(d) A quelle condition sur F et G, $F + G$ est E ?

Exercice 4

On pose $E = \mathbb{R}^5$. Parmi les sous-ensembles suivants F de E, lesquels sont des sous- espaces vectoriels ?

(a) $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E \mid x_1 = 0\}$

(b) $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E \mid x_1 = 1\}$

(c) $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E \mid x_1 = x_2\}$

(d) $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E \mid x_1 + \cdots + x_5 = 0\}$

(e) $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$

Exercice 5

Montrez que la famille

$$\{(1, 1, 2);\ (1, 0, 1);\ (0, 1, 2)\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 6

Posons $E = \mathbb{R}^4$. Les familles de vecteurs suivantes sont elles libres et/ou génératrices ?

(a) $(1, 2, -1, 1)$, $(2, -1, 5, 3)$

(b) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 6, 0)$, $(1, 2, 4, -1)$, $(-2, -3, -1, 2)$

(c) $(0, 0, 3, 2)$, $(2, 3, 2, 4)$, $(4, 6, -5, 2)$

Exercice 7

Pour quelle valeur(s) de m dans $\mathbb{R}$ la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^4$:

$$(2, 0, 1, m), (2, 1, -1, 0), (1, 2, 1, 2), (2, -3, -1, 1)$$

Exercice 8

Expliquez pourquoi il est possible d'écrire $v = (1, 2, -5)$ comme combinaison linéaire de $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ et $u_3 = (2, -1, 1)$ et trouvez cette combinaison.

Exercice 9

Dire si les espaces F suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et, dans l'affirmative, trouvez une base de ces espaces :

(a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$

(b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2z\}$

(c) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y + z = 0\}$

(d) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 4\}$

(e) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3xy - z = 0\}$

Exercice 10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues qui sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Que pensez vous de fonctions suivantes ? Forment elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

(a) $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(x)$

(b) $f_1 : x \mapsto \exp(x)$ et $f_2 : x \mapsto \exp(-x)$

(c) $f_1 : x \mapsto x^2$, $f_2 : x \mapsto 1$ et $f_3 : x \mapsto x$

(d) $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$

(e) $f_1 : x \mapsto \cos^2(x)$, $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$ et $f_3 : x \mapsto 1$

(f) $\{x \mapsto 1,\ x \mapsto e^x,\ x \mapsto e^{2x}, ...,\ x \mapsto e^{nx}\}$ pour n un entier naturel.

Exercice 11

Soit E l'espace des fonctions qui sont définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On le munit des opérations classiques sur les fonctions qui font de E un espace vectoriel. Ces sous-ensembles de E sont ils des sous espaces vectoriels de E :

(a) L'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

(b) L'ensembles des applications surjectives (injectives)de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

(c) L'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$

(d) l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) + 1$

Exercice 12

On pose $\mathbb{R}^2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(a) L'espace des polynômes de degré égal à 2 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2[X]$.

(b) Soit $\Pi = \{P \in \mathbb{R}^2[X] \mid P = \lambda + (\lambda - \mu)x + \mu x^2$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Montrez que Π est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2[X]$ et donnez en une base.

Exercice 13

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Exercice 14

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et ε l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrez que ε est un sous espace vectoriel de E

(b) Montrez que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de ε.

(c) Montrez que ces deux suites forment une base de ε.

(d) Déterminez les suites de ε telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Espaces vectoriels : Feuilles d'exercices II

Exercice 15

Dites si les applications suivantes sont linéaires ou non :

(a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+2 \end{array}$

(b) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \cdot x_2 \end{array}$

(c) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_2, x_1 + x_2) \end{array}$

(d) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (3x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_2) \end{array}$

(e) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (x_4 - x_3, x_2 - x_1, x_3) \end{array}$

(f) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, x_2, 0) \end{array}$

(g) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (-x_1, -x_2, x_3) \end{array}$

(h) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2, \cos(\theta)x_2 + \sin(\theta)x_1, x_3) \end{array}$

Exercice 16

On pose l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = e_2 \quad , \quad f(e_3) = e_3 \quad , \quad f(e_3) = e_1$$

Déterminer le noyau et l'image de f, puis calculer f^2, f^3. Enfin, en trouvant les vecteurs fixes, c'est à dire les vecteurs u tels que $f(u) = u$.

Exercice 17

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\big(f(P)\big)(X) = P(X+1) - P(X)$$

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer le noyaux de f

(c) Déterminer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$, $f(X^3)$.

(d) Ecrire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 18

Déterminez toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19

Montrez que les applications suivantes sont des applications linéaires :

(a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (3x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_2) \end{array}$

(b) L'application lim qui donne la limite d'une suite convergente, définie sur l'espace vectoriel des suites réelles convergentes et à valeurs dans $\mathbb{R}$

(c) L'application $\int_0^1$ qui donne l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$, définie sur l'espace des fonctions continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: $\int_0^1 : f \mapsto \int_0^1 f(x)\ dx$

(d) L'application "dérivée" définie sur l'espace des polynômes à coefficients réels : $P \mapsto P'$

(e) La projection dans $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des abscices (l'axe de première coordonnée).

Exercice 20

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t) \end{array}$$

Montrez que f est linéaire puis déterminez une base de son noyau et de son image.

Exercice 21

Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ infiniment dérivables. On pose l'application :

$$\varphi: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' - f \end{array}$$

Montrez que φ est linéaire puis déterminez une base de son noyau.

Exercice 22

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme de E dans E. On choisit une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E

(a) Démontrez que $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel.

(b) On pose pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'application

$$p_i: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u = (u_1, \ldots, u_n) & \longmapsto & (0, \ldots, 0, u_i, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

où $(u_1, \ldots, u_n)$ sont les coordonnées de u dans la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Autrement dit, p_i ne conserve que la i-ème coordonnée des vecteurs de E.

(c) Montrez que $p_i \in \mathcal{L}(E)$. Ces applications sont appelées les projecteurs de E relativement à la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

(d) Calculez p_i^2.

(e) Trouvez une base du noyau de p_i.

(f) Trouvez une base de l'image de p_i.

Matrices, déterminant et applications linéaires : Feuilles d'exercices I

Exercice 23
Faites toutes les opérations possibles avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 24
Calculer A^n dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25
Donnez dans les bases canoniques des espaces considérés, la matrice des applications f de l'**exercice 15** quand elles sont linéaires.

Exercice 26
Soit l'application lin éaire f de E dans F, munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, dont la matrice écrite dans ces bases est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Quelle est la dimension de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée ?

(b) Quelles sont les images des vecteurs de E dont les coordonnées dans B_E sont :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 27

On pose E le sous-espace de l'esapce des fonctions continues engendré par les fonctions **cos** et **sin** et d l'application dérivée, c'est à dire :

$$d(f) = f' \quad , \text{Pour tout } f \in E$$

Déterminer les matrices de d, d^2, d^3 et d^4 dans les base $\{\sin, \cos\}$ de E.

Exercice 28

On se place dans l'espace vectoriel R^3 muni d'une base $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$. On considère les applications linéaires f et g définis par :

$$f(u) = -v + 2w \quad f(v) = 3u + 6v \quad f(w) = 5u - v + 4w$$

$$g(u) = 5u + v + 2w \quad g(v) = 9u - 3v + w \quad g(w) = -u + 2v + 4w$$

(a) Ecrire les matrices A et B représentant f et g par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(b) Ecrire les matrices C et D représentant $f \circ g$ et $g \circ f$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 29

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'application linéaire qui à un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $u(x, y, z) = (y - 2z, 2x - y + 4z, x - y + 3z)$.

(a) Déterminer la matrice A de u dans la base canonique $\mathcal{B}$.

(b) Déterminer une base (a, b) de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

(c) Donner un vecteur c tel que $\mathrm{Ker}(u) =< c >$.

(d) Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.

(f) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

(g) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 30

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. On considère f l'application linéaire de E vers E telle que :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

(a) Quelle est la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$? Si $u \in E$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$?

(b) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$.

(c) Déterminer le noyau et l'image de f.

(d) Ces sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

(e) Quelle est la matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$? En déduire $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$.

Matrices, déterminant et applications linéaires : Feuilles d'exercices II

Exercice 31

Calculez les déterminants des matrices suivantes :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 9 & 5 \\ 2 & 18 & 10 & 6 \\ 3 & 21 & 11 & 7 \\ 4 & 24 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ (9) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Exercice 32

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ et $\det(A+B)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 33

Le volume d'un parallélépipède défini par trois vecteurs est donné par le module du déterminant de la matrice obtenue en mettant en colonnes les composantes des trois vecteurs. Calculer alors le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $u_1 = (1; 2; 3)$, $u_2 = (-1; 0; 2)$ et $u_3 = (0; 1; 1)$.

Exercice 34

Résoudre les systèmes suivants à l'aide des déterminants :

(a) $\begin{cases} 3x - 2y - z &= 1 \\ -y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$

Exercice 35
A quelles consitions les matrices suivantes sont inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

Exercice 36
Calculez l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z & = 1 \\ -3x + y + 3z & = 2 \\ 2x + y - 2z & = -2 \end{cases}$$

Exercice 37
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrez que la matrice A suivante est inversible puis calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 38
Résoudre le système linéaire suivant en discutant suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2z & = & -4 \\ -x + y + (\alpha + 4)z & = & 10 \\ x - \alpha y - 5z & = & -10 \end{cases}$$

Exercice 39
Résoudre suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(a)

$$\begin{cases} x + (m-1)y & = & m + 2 \\ mx + (m+4)y & = & 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} mx + (m-1)y & = & m + 2 \\ (m+1)x - my & = & 5m + 3 \end{cases}$$

Exercice 40
Calculez l'inverse des matrices de l'exercice 31 quand c'est possible.

Exercice 41

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Résoudre l'équation en X : $\det(M - X\,\mathrm{Id}) = 0$.

(b) Pour chaque solution x_i de l'équation, trouver un vecteur $u_i \in \mathbb{R}^3$, tel que $Mu_i = x_i u_i$. On note P la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs propres précédemment obtenus.

(c) Inverser la matrice P. Calculer alors $N = P^{-1}MP$.

Exercice 42

Discutez suivant la valeur de λ la dimension du sous espace vectoriel engendré par les vecteurs suivants :

(a) $u_1 = (\lambda, 1, 1)$, $u_2 = (1, \lambda, 1)$, $u_3 = (1, 1, \lambda)$

(b) $u_1 = (2\lambda + 1, 0, 0)$, $u_2 = (3, \lambda - 2, 0)$, $u_3 = (-2, -5, \lambda)$

(c) $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (0, -1, 1)$, $u_3 = (2, -1, \lambda)$

Exercice 43

Résoudre les systèmes suivants en discutants des valeurs de $a, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z + t & = & a \\ -x + y - z + t & = & b \\ -x - y + z + t & = & c \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & -1 \\ x - 3y - 4z & = & 10 \\ x - 2y + z & = & 15 \\ x + y + \lambda z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 44

Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 45

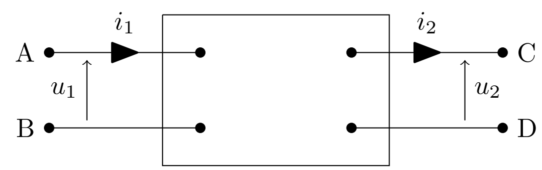
Soit

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n)) \end{array}$$

Montrez que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels en utilisant deux méthodes différentes.

Exercices d'application en électricité

Un quadripole électrique est un réseau électrique contenant résistances, capacité, inductances, ou d'autres composants qui a deux bornes d'entrée et deux bornes de sorties. Il est donc caractérisé par deux données d'entrée u_1 et i_1 et deux en sortie u_2 et i_2 qui sont changée en fonction de la ce qu'il y a dans la "boite".



La loi d'Ohm nous donne existe les relations suivantes entre ces entitées :

$$\begin{cases} u_2 &= au_1 + bi_1 \\ i_2 &= cu_1 + di_1 \end{cases}$$

Autrement dit en terme matriciel :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est appelée la *matrice de transfert* du quadripole.

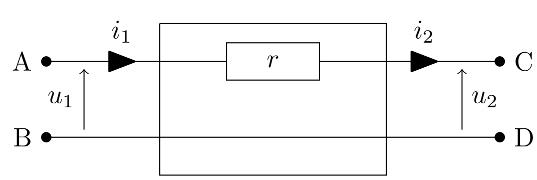
De la même manière on peut définir la *matrice d'admittance* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, définie par :

$$\begin{cases} i_1 &= a\alpha u_1 + \beta u_2 \\ i_2 &= \gamma u_1 + \delta u_2 \end{cases}$$

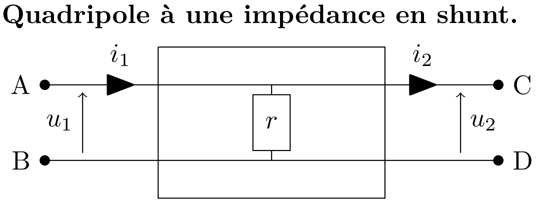
et la matrice inverse $A^{-1} = Z$ appelée *matrice d'impédance*.

1. Quadripole à une impédance série.

Calculer la matrice de transfert de ce quadripole en fonction de r et en utilisant la loi d'Ohm. On notera cette matrice T_r.

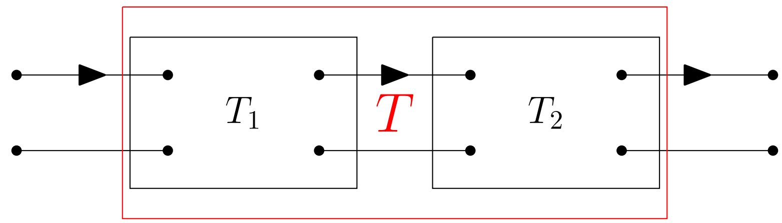


2. Quadripole à une impédance en shunt.



Calculer la matrice de transfert de ce quadripole en fonction de r et en utilisant la loi d'Ohm. On notera cette matrice T^r.

Pour des quadripoles consécutifs, on peut multiplier les matrices de transfert de chaque quadripole pour trouver la matrice de transfert du quadripole total.

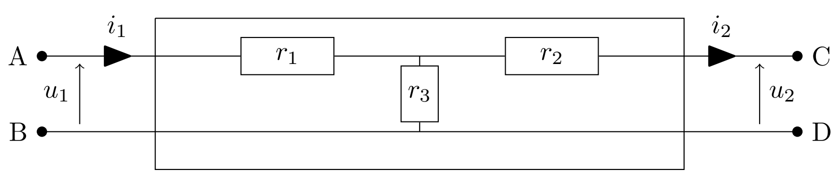


Ici, on a par exemple :

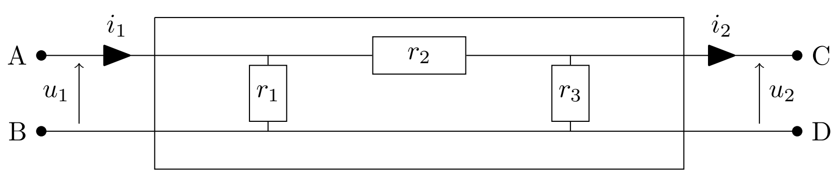
$$T = T_1 T_2$$

3. Quadripole à cellule en $\boldsymbol{T}$

Calculer la matrice de transfert du quadripole ci-contre en utilisant la règle ci dessus et les résultats des questions précédentes.



4. Quadripole à cellule en π



Calculer la matrice de transfert du quadripole ci-contre en utilisant la règle ci dessus et les résultats des questions précédentes.