Approximations de fonctions

Exercice 1

Montrez que pour toute fonction f qui admet une dérivée seconde continue :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

Appliquez ce résultat à $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

Exercice 2

Ecrire les formules de Taylor à l'ordre 3 des fonctions suivantes sur un intervalle de la forme $[0, h]$, pour $h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$j(x) = \cos(x)$$

En déduire un arrondi de $\sqrt{1,002}$, $\frac{1}{1,0023}$ et $\cos(0,02)$. Vérifier l'arrondi donné à la calculatrice.

Exercice 3

A partir de la formule de Mac Laurin à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, donnez la limite en $+\infty$ de la somme

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Exercice 4

Chercher les points d'inflexion de la courbe de la fonction f, définie par $f(x) = e^x x^n$, pour tout $n \in N$. On distinguera les cas pair et impair.

On rappelle qu'un point d'inflexion est un point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$ et que f' ne change pas de signe au voisinage de a.

Exercice 5

En utilisant une formule de Mac Laurin, démontrez les inégalités suivantes, pour $x > 0$:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

$$x + \frac{x^3}{3} < \tan x$$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

Exercice 6

Soit $f(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner un développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0.
2. En déduire un DL de f en 0.
3. Calculer alors la limite de la somme

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

$$(1)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \qquad (4)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)}$$

$$(5)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sqrt{x})-1}{x} \qquad (6)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x-\exp(x)+1} \qquad (7)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2\sin(x)} \qquad (8)\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{1/3}-1}{x}$$

Exercice 8

Même question pour :

$$(1)\quad \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{x-2} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1} \qquad (3)\quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)}-x \qquad (4)\quad \lim_{x\to +\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$(5)\quad \lim_{x\to +\infty} x - \ln(\cosh x) \qquad (6)\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (7)\quad \lim_{x\to 0} \ln(x)^x \qquad (8)\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(x)\cos(x)}{x+1}$$

1. Calculer un développement limité de f à l'ordre 4 en 0.
2. En déduire une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{x+1}$$

1. Calculer un développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Exercice 11 1. Déterminer la limite l en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\exp(x) - 1}{x}\right)$$

2. En déduire la limite de

$$\frac{f(x) - l}{x}$$

Exercice 12
Classez par ordre croissant les courbes représentatives des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \sin x & x \mapsto \arctan x & x \mapsto \cosh(x) - 1 \\ x \mapsto \arcsin x & x \mapsto \tan x & x \mapsto \sinh x \\ x \mapsto x & x \mapsto x^2 & x \mapsto \exp(x) - 1 \end{array}$$

Exercice 13
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x^3 + 2x^2 + x)^{1/3}$$

1. Calculer un développement limité généralisé de f à l'ordre 3 en $+\infty$.
2. En déduire l'équation de l'asymptote oblique de f et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

Exercice 14
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1}$$

1. Calculer un développement limité généralisé de f à l'ordre 3 en $+\infty$.
2. En déduire l'équation de l'asymptote oblique de f et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

Exercice 15
Calculez un développement limité en 0 à l'ordre 5 de :

$$\frac{1 + \sin(x))^{3/2}}{1 + x^3}$$

Exercice 16
A l'aide d'un développement limité, trouver l'asymptote oblique de la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

et déterminer la position relative de la courbe et de cette asymptote.

Intégrales doubles

Exercice 17

Calculez les doubles intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$
2. $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq \frac{\pi}{2}\}$
3. $\displaystyle\iint_D \,dx\,dy \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2\}$
4. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$
5. $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0,\ x \geq 0,\ y+x \leq 1\}$
6. $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0,\ x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$
7. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1,\ x \geq 1,\ x+y \leq 4\}$
8. $\displaystyle\iint_D \ln(1+x+y)\,dx\,dy \quad$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1,\ x \geq 1,\ x+y \leq 4\}$

Exercice 18

On considère la fonction $f(x,y) = \frac{e^{-x-y}}{x+y}\,dx\,dy$. Soit

$$D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0,\ x \geq 0\}$$

1. Soit $z \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer
$$\iint_{D_z} f(x,y)\,dx\,dy$$
où $D_z = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0,\ x \geq 0,\ x+y \leq z\}$
2. Montrez que D_z tend vers D quand $z \to +\infty$.
3. En déduire la valeur de
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Exercice 19

Calculer les aires délimitées par les domaines suivants :

1. Le domaine D délimité par $2 \geq x \geq 1$ et $3 \geq y \geq 2$.
2. Le domaine D délimité par $y \geq x \geq 1$ et $3 \geq y \geq 2$.
3. Le domaine D délimité par $x \geq 1$, $y \geq 2$ et $x + y \leq 5$.
4. Le domaine D délimité par $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $5x + 3y \leq 3$.
5. Le domaine D délimité par les paraboles $y^2 = 2x$ et $y = (x-3)^2$
6. Le domaine D délimité les paraboles $y = x^3 - x^2 - 3x - 1$ et $y = -\left(x-1\right)^2 + 3$
7. Le domaine D délimité par les courbes $y = e^x$, $y = e^{-x}$ et $y = 0$.
8. Le domaine D délimité par $-y^3 + y^2 + 1 \geq x \geq -y^2 - 1$ et $e^x \geq y \geq e^x - 5$.

Exercice 20

Calculer les intégrales suivantes grâce à un changement de variable en coordonnées polaires :

1. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\ dy}{1 + x^2 + y^2}$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $\displaystyle\iint_D x^2 + y^2\ dx\ dy$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$, en admettant que $\sin^4(x) = \cos(4x) - 4\cos(2x) + 3$.
3. $\displaystyle\iint_D x^2 + y^2\ dx\ dy$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 - x \leq 0,\ x^2 + y^2 - y \geq 0\}$, en admettant que $\cos^4(x) - \sin^4(x) = -\cos(2x)$.
4. $\displaystyle\iint_D x^2 - y^2\ dx\ dy$ où $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0,\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exercice 21

Calculer les intégrales curvilignes suivantes grâce au théorème de Green-Riemann :

1. $\displaystyle\int_C xy\ dx + x\ dy$ où $\mathscr{C} = \{(x, 1 - x^2) \mid x \in [-1, 1]\}$
2. $\displaystyle\int_C xy\ dx + x\ dy$ où $\mathscr{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, \pi]\}$
3. $\displaystyle\int_C y^2\ dx - x^2\ dy$ où $\mathscr{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$
4. $\displaystyle\int_C y^2\ dx + x^2\ dy$ où $\mathscr{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$
5. $\displaystyle\int_C y^2\ dx + x^2\ dy$ où $\mathscr{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$
