Isfates - L1 - S2 - Algebra 2

Simon ROBY, inspiriert von Tilmann Wurzbachers Kurs

Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Einführung

I

Matrizen

I.1 Vektorraüme

Vektorraum ist der zentral Objekt der Linearen Algebra. Wir kennen schon viele Beispiele von Vektorraümen. Der Raum der real Zahlen $\mathbb{R}$ und der Plan $\mathbb{R}^2$ sind die Ersten. In dieser Kapitel wollen wir herausdestillieren, was allen gemeinsam ist.

Definition I.1 (Vektorraum) :
Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein Vektorraum V über K (kurz auch: K-Vektorraum) ist eine Menge von Vektoren, für die:

1. wenn $v, w \in V$, und $\lambda \in K$, haben wir $\lambda \cdot v + w \in V$
2. es gibt ein Element $0 \in V$, sodass für alle $v \in V$, haben wir:
$$v + 0 = 0 + v = v \ ,$$
3. für alle $v \in V$ gilt
$$1 \cdot v = v \ ,$$
4. für alle $a, b \in K$ und alle $v \in V$ gilt
$$a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v \ ,$$
5. Für alle $a, b \in K$ und alle $u, v \in V$ gilt
$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$$
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \ .$$

Beispiel I.1 : (1) $V = \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum, für ein Ganzzahl n. Die Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind beschrieben:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die letzte Gleichung ist ein Definition. Die Anmerkung ${}^tA$ ist die transponierte von A genannt.

(2) Die Menge der Sequenzen anmerkt l_n ist ein Vektorraum. Dies ist der Folgenraum.

$$l_n := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

(3) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R}\} .$$

Dies ist ein Vektorraum, Funktionenraum gennant.

Definition I.2 (Untervektorraum) :
Es seien $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum. Ein (K-)Untervektorraum von V ist eine nicht leer Teilmenge $U \subset V$, die fesstellt:

$$\forall u_1, u_2 \in U,\ \forall a \in K:\ a \cdot u_1 + u_2 \in U$$

Beispiel I.2 : (1) Die Kurve einer linearen Funktion $f : x \mapsto ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(2) Die Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}_n$. Es ist eine Hyperebene genannt.

(3) Die Teilmenge

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ kontinuierliche}\} .$$

ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Definition I.3 (Familien von Vektoren, frei, erzeugend - Basis) :
Es seien $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{F}$ ist eine Abzählbare Menge von Vecktoren.

(1) $\mathcal{F}$ ist frei wenn, und nur wenn die Element von $\mathcal{F}$ linear unabhängig sind, d.h.

$$\forall a_1, \ldots, a_k \in K \text{ und } v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{F},\ \left(\sum_{j=1}^{k} a_jv_j = 0 \Rightarrow a_j = 0,\ \forall j \in [\![1, k]\!]\right)$$

(2) $\mathcal{F}$ ist erzeugend wenn, und nur wenn alle Vektoren in V sind Linearkombination von Elementen in $\mathcal{F}$, d.h. Für alle $v \in V$, es existiert $a_1, \ldots, a_k \in K$ und $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{F}$, sodass:

$$\sum_{j=1}^{k} a_jv_j = v$$

③ $\mathcal{F}$ ist eine Basis von V wenn, und nur wenn $\mathcal{F}$ ist frei und erzeugend.

④ Die Dimension von V ist die Mächtigkeit von einer seiner Basis.

Bemerkung :
Wir sagen, dass V endlische Dimension hat, wenn V eine Basis $\mathcal{B}$ mit einem endliche Anzahl n von Vektoren hat. Alle Basis von V haben dann n Elementen. Wir sagen also, dass die Dimension n ist, und wir schreiben

$$\dim_K V = n \ .$$

Beispiel I.3 : ① Die Dimension von $\mathbb{R}^n$ ist n.

② Die Dimension von $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ist 3.

Definition I.4 (Linear Abbildung) :
Es seien $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V, W zwei K-Vektorraüme und $f : V \to W$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f eine Linear Abbildung ist, wenn und nur wenn für alle $\lambda \in K$ und $u, v \in V$, gilt

$$f(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot f(u) + v$$

Beispiel I.4 :
Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$.

① $g : V \to W$, sodass $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 + x_3^2)$ ist nicht linear wegen das Quadrat.

② $f : V \to W$, sodass $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_1, x_1 + x_3)$ ist linear.

Definition I.5 (Kern - Bild) :
Es seien $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V, W zwei K-Vektorraüme und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

① Das Kern von f ist
$$\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\} \ .$$
Dies ist ein Untervektorraum von V.

② Das Bild von f ist
$$\mathrm{im}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} \ .$$
Dies ist ein Untervektorraum von W. Die Dimension von $\mathrm{im}(f)$ heißt Ërang von f".

③ Das Rang $\mathrm{rg}(f)$ ist die Dimension des Bildes der Abbildung f

Beispiel I.5 :
Das Bild von f (in das letztes Beispiel) ist
$$\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$$

und ihr Kern ist

$$\ker(f) = \{\lambda(1,-1,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \ .$$

Vorschlag I.1 (Rangsatz)
Es seien $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V, W zwei K-Vektorraüme und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir haben diese Dimensionsgleichung:

$$\dim V = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) \tag{I.1}$$

Beispiel I.6 :
Sei

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y-z \end{array} .$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$, $f(a,0,0) = a$. Also $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$.
Dank der Rangsatz haben wir

$$\dim(\ker(f)) = \dim R^3 - \dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - 1 = 2$$

Man kann prüfen:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow &\quad x+y-z = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad x+y = z \end{aligned}$$

Also $\ker(f) = \{(x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid x,y \in R\}$

I.2 Matrizen

Definition I.6 (Matrix) :
Eine Matrix (Plural Matrizen) über K ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Zahlen im K. Der Anzahl von Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist von der Form :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

a_{32} ist der Koeffizientwert in der dritte Zeile und zweite Spalte. Wie für die Elemente von $\mathbb{R}^n$, die Transponierte der Matrix A ist die folgende Matrix mit n Zeilen und m Spalten:

$${}^tA = A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir schreiben die Vektorraum der Matrizen von Größen $n \times m$ über K

$$\mathsf{Mat}(n,m,K)$$

Matrizenaddition und Skalarmultiplikation:
Zwei Matrizen können addiert werden, wenn sie vom selben Typ sind, das heißt, wenn sie dieselbe Anzahl von Zeilen und dieselbe Anzahl von Spalten besitzen. Die Summe zweier $m \times n$-Matrizen ist komponentenweise definiert:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Also wir addieren die Koeffizientwerte mit die selbe Indexen.
Sei $\lambda \in K$. Eine Matrix wird mit dem Skalar λ multipliziert, indem jeder Eintrag der Matrix mit dem Skalar multipliziert wird:

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Beispiel I.7 :

$$\begin{aligned}
-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 & -3 \cdot 1 & -3 \cdot (-2) \\ -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3+0 & -3+0 & 6+2 \\ 3+(-1) & 0+5 & -9+(-7) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 \\ 2 & 5 & -16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation:
Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Das Produkt einer $l \times m$-Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$ und einer $m \times n$-Matrix $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ist eine $l \times n$-Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ deren Einträge berechnet werden, indem die Produktsummenformel, ähnlich dem Skalarprodukt, auf Paare aus einem Zeilenvektor der ersten und einem Spaltenvektor der zweiten Matrix angewandt wird:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

ACHTUNG: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d. h., im Allgemeinen gilt

$$B \cdot A \neq A \cdot B \ .$$

In der Tat, wenn diese matrizen nicht Quadrat (von Größen $n \times n$) sind, ist eine dieser beiden Multiplikationen nicht einmal möglich.

Die Matrizenmultiplikation ist allerdings assoziativ, d. h., es gilt stets:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \ .$$

Anschließend, für alle Matrizen A, B, C mit gut gewählte Größen :

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$$

Beispiel I.8 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 5 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 1\cdot(-2) + 3\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 1\cdot(-4) + 3\cdot 6 \\ (-1)\cdot 0 + 3\cdot 0 + (-2)\cdot 2 & (-1)\cdot(-1) + 3\cdot 5 + (-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot 3 + 3\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 + 3\cdot(-4) + (-2)\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 16 \\ -4 & 18 & -7 & -20 \end{pmatrix}$$

I.3 Link mit Vektorraüme

Sei $A \in \mathsf{Mat}(n, m, K)$. Wir betrachten die linear Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f_A : & K^m & \longrightarrow & K^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \longmapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dies gibt ein Link zwischen den Vektorraum von Matrizen $\mathsf{Mat}(n, m, K)$ und die linear Abbildung von K^m zu K^n. Das Ergebnis von $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ gibt eine Matrix mit n Zeilen und einer Spalte. Also f_A ist gut definiert.

Bemerkung :
Wie f_A eine linear Abbildung ist, können wir das Bild und den Kern errechnen.

- Das Bild von f_A ist definiert durch

$$\mathrm{im}(f_A) = \{f_A(x) = Ax \mid x \in K^m\}$$

  Dies heißt den Spaltenraum von A, d.h. der Unterraum von K^m der von den Spalten von A erzeugt wird, $S(A)$ geschrieben.

- Das Kern von f_A ist definiert durch

$$\ker(f_A) = \{x \in K^n \mid f_A(x) = Ax = 0\}$$

  Dies heißt den Nullraum von A, d.h. der Unterraum von K^m der von den Spalten von A erzeugt wird, $S(A)$ geschrieben.

Wir werden weitere Techniken sehen, um sie aus A zu berechnen, zum Beispiel mit Gauss Eliminations verfahren.

Beispiel I.9 :
Sei

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x + y, 2x - y, 3x + y) \end{array}.$$

f is eine linear Abbildung. Sei

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann wir haben:

$$A_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ 3x + y \end{pmatrix}$$

Wir können sehen, daß A_f die Handlung von f kopiert, seit $f(x,y) = (1x+1y, 2x+-1y, 3x+1y)$. Mit Gauss Eliminations können wir das Rang von A_f berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist der rang von A_f 2. Das ist die Dimension dem Bild von f. Mit dem Rangsatz, haben wir :

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f))$$
$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim(\mathrm{im}(f)) = 2 - 2 = 0$$

I.4 Determinanten

Definition I.7 (Determinant für 2×2 Matrizen) :
Die Determinante (det) kann für 2×2 Matrizen definieren, wie folgt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

Definition I.8 (Determinant für $n \times n$ Matrizen) :
Man kann die Determinante über jede Spalten und jede Zeiten Distributivieren, wie folgt. Sei A eine $n \times n$ Matrix definiert durch:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Man kann sehen, dass a_{ij} ist der Koeffizient in der Zeile i und in der Spalte j.
Wir definieren dann der Vorzeichen $n \times n$ Matrix mit $+$, ob SZeile + Spalte"gerade ist, und mit $-$, ob SZeile + Spalteüngerade ist:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Distributivgesetze über die erste Zeile :

$$\det A = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots \pm a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} .$$

Wir können dann durch Vollständige Induktion die Determinante von jeder Matrix berechnen.

Beispiel I.10 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 0 + 1 + 2 = 3$$

Vorschlag I.2
Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix. Wenn $\det A \neq 0$, wissen wir, daß A eine Reguläre Matrix ist. Also A^{-1} existiert.

Bemerkung : 1 Sei $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Wenn

$$\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right| \neq 0 \ ,$$

ist $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Hier werden die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_n$ in Spalten geschrieben. Es gibt dasselbe für $\mathbb{C}^n$.

2 Wenn $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, ist

$$\left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right| = |u_1 v_2 - u_2 v_2|$$

die Flächeninhalte des von u und v aufgespannten Parallelprogramms.

3 Wenn $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3),\ w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, ist

$$\left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}\right|$$

das Volumen des von u, v und w aufgespannten Parallelotop.

I.5 Inverse Matrix

Definition I.9 :
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Matrix A ist <u>invertierbar</u> gesagt, wenn $\det A \neq 0$.
Wenn eine Matrix invertierbar ist, kann man ihre inverse Matrix berechnen.

Definition I.10 :
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die inverse Matrix B von A ist so, dass

$$BA = AB = I_n \ .$$

wo I_n is die Einheitsmatrix von lange n.

Bemerkung :
Es gibt jetzt zwei Methode um ein System zu lösen : Benutzen das Gausselimination oder die inverse Matrix. Sei

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3x + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \end{cases}$$

<u>Mit Gauss elimination:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

So $\begin{cases} x = 1 \\ y = (-9)/(-6) = 3/2 \\ z = 2/(-2) = -1 \end{cases}$.

<u>Mit die inverse Matrix:</u> Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann A ist invertierbar und $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3x + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und wir haben dieselbe Lösungen.

II

Eigenbasiswechsel

II.1 Eigenvektoren und Eigenwerte : Definitions

Definition II.1 :
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathsf{Mat}(n, n, \mathbb{K})$, wo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von A,

2. Ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert α, gibt mit $A \cdot v = \alpha \cdot v$,

3. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A. Dann heißt

$$\mathsf{Eig}(A, \alpha) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot v = \alpha \cdot v\}$$

   der Eigenraum von A zum Eigenwert α.

4. Eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ heißt Eigenbasis für A, wenn es $alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (nicht notwendigerweise verschieden !) so dass,

$$A \cdot v_j = \alpha_j \cdot v_j \qquad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

5. Wir nennen A diagonalisierbar, wenn es eine Eigenbasis für A gibt.

Vorschlag II.1
Wenn A ist diagonalisierbar mit Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und jeweilige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$, existiert es eine invertierbar Matrix P, Basiswechselmatrix genannt, so, dass

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Die matrix

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

passt, mit die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ im Spalten geschrieben.

Bemerkung (Achtung) :
Nicht für jede Matrix gibt es eine Eigenbasis. Zum Beispiel sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen erste die Eigenwerte :

$$\det(\alpha I_2 - A) = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 2 \\ 0 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)^2$$

Also gibt es ein Eigen werte 1. Wenn A diagonalisierbar ist, gibt es P eine inverse Matrix so, dass

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \ .$$

Aber $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P$ und dann $A = PP^{-1} = I_2$. Das ist absurd. Also A ist nicht diagonalisierbar.

Es gibt also Matrizen, die sind diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ aber nicht über $\mathbb{R}$. Nehmen Sie zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

II.2 Method

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathsf{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ in diesen Paragraph, wo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

II.2.1 Berechnung der Eigenwerte

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathsf{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ in diesen Paragraph, wo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition II.2 :
Das Polynom (vom Grad n) im $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\det(A - \alpha I_n)$$

ist genannt das charakteristische Polynom von A.

Vorschlag II.2
Die folgenden Sätze sind äquivalent:

- $\alpha \in \mathbb{K}$ *is a ein Eigenwert von* A*,*
- *es gibt einen Vektor* $v \in \mathbb{K}^n$ *so, dass* $A \cdot v = \alpha \cdot v$*,*
- *das Kernel* $\ker(A - \alpha I_n)$ *von* $A - \alpha I_n$ *enthält ein Nicht-Null-Element* v*,*
- $\det(A - \alpha I_n) = 0$*,*
- α *ist eine Nullstelle des charakteristische Polynom van* A*.*

Außerdem, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *2* ***verschiedene*** *Eigenwerte sind, so gilt*

$$\mathsf{Eig}(A, \alpha) \cap \mathsf{Eig}(A, \beta) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \ .$$

Also, wenn A n *verschiedene Eigenwerte in* $\mathbb{K}$ *hat, ist* A *diagonalisierbar.*

Die Frage ist jetzt : "Was können wir machen, wenn wir haben nur $n-1$ Eigenwerte (oder wenige) für A ?"

In diesem Fall, es gibt eine doppelte (oder mehr) Nullstelle im charakteristische Polynom. Für diese Eigenwerte, müssen wir so viele Eigenvektoren finden wie den Ordnung der Nullstelle im charakteristischen Polynom, wenn A diagonalisierbar ist.

Definition II.3 :
Das Minimalpolynom von A (nicht immer vom Grad n) ist das Polynom Π mit dem niedrigsten Grad so, dass $\Pi(A)$ ist das null Matrix.

Vorschlag II.3
Die folgenden Sätze sind äquivalent:

- *A ist diagonalisierbar,*
- *das Minimalpolynom Π von A hat nur Nullstellen von Ordnung 1.*

Beispiel II.1 :
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Wir haben gesehen, dass A nicht diagonalisierbar ist. I_2 ist natürlich diagonalisierbar, weil sie schon diagonal ist. Diese zwei Matrizen haben das gleich charakteristische Polynom im α

$$(\alpha - 1)^2 \ .$$

Aber das minimal Polynom für I_2 ist deutlich $\alpha - I_2$, aber es ist Klar das dieses Polynom hebt A nicht auf:

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Also das Minimalpolynom von A ist das charakteristische Polynom von A und hat eine doppelte Nullstelle. A ist nicht diagonalisierbar, wie wir schon gesehen haben.

II.2.2 Eigenvektoren

Diagonalisierbar Matrix

Vorschlag II.4
Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A.

1. *Wenn es gibt n verschiedene Eigenwerte für eine Quadratmatrix A von größe n, ist A diagonalisierbar. Dann für jedes Eignewert $\alpha \in \mathbb{K}$:*

$$\dim \mathsf{Eig}(A, \alpha) = 1 \ , \quad \textit{so} \quad \mathsf{Eig}(A, \alpha) = \mathbb{K} \cdot v_\alpha \ ,$$

wo v_α is ein Eigenvektor von A für α. Außerdem hat das System in die Variablen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$(A - \alpha I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

eine Gleichung proportional zu den anderen.

(2) *Wenn es gibt nicht n verschiedene Eigenwerte für eine Quadratmatrix A von größe n, wissen wir nicht wenn A diagonalisierbar oder nicht ist. Dann das Polynom, das nach Entfernen aller quadratischen oder größeren Faktoren des charakteristischen faktorisierten Polynoms erhalten wird, muss A aufheben. Wenn ja, ist A diagonalisierbar. Dieses Polynom ist dann das Minimalpolynom von A.*

Beispiel II.2 : (1) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist das charakteristisches Polynom

$$\det(A - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) \ .$$

Es gibt 2 verschiedene Eigenwerte (1 und 3) für A (von Größe 2), also A ist diagonalisierbar.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ -11 & 23 & 6 \\ -22 & 14 & 28 \end{pmatrix}$. Dann ist das charakteristisches Polynom

$$\det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) \ .$$

Es gibt 2 verschiedene Eigenwerte (2 und 3) für A (von Größe 3), also wir wissen nicht, wenn A diagonalisierbar ist. Sei $P(X) := (2-X)(3-X)$ das Polynom, das nach Entfernen aller quadratischen oder größeren Faktoren des charakteristischen faktorisierten Polynoms erhalten wird. Dann

$$P(A) = (2I_3 - A)(3I_3 - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Also A ist diagonalisierbar.

Definition II.4 :
Hat für ein Eigenwert $\lambda \in K$ die Gleichung $f(v) = \lambda v$ eine Lösung $v \neq 0$ (der Nullvektor ist natürlich immer eine Lösung). f. Jede Lösung $v \neq 0$ heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

Nicht diagonalisierbar Matrix

Dieses Fall ist nicht behandelt in diesem Kurs.