Prüfung von Algebra 2

Freitag 26 märz 2021

Anleitungen :
Dokumente sind nicht erlaubt. Handys sollten weggelassen werden. Taschenrechner verboten!

Consignes :
Aucun document est autorisée. Les portables devront rester éteints. Calculatrices interdites !

Übung 1 — [2 Punkte]

Lösen Sie die folgende Gleichung über $\mathbb{C}$ (Wir können die Gleichung in der Form $az^2 + bz + c = 0$ umschreiben):

$$\frac{z-5}{z+5} = z$$

Gibt es einen Unterschied, wenn wir sie auf $\mathbb{R}$ lösen?

Übung 2 — [5 Punkte]

Sei $D = -8 + 6i$.

1. Geben Sie die Quadratwurzeln von D. [2.5 Punkte]
2. Leiten Sie die Lösungen der Gleichung her [1 Punkt]

$$2z^2 + (1-5i)z - 2 - 2i = 0\ .$$

3. Geben Sie die Polarform von die Lösungen. [1.5 Punkt]

Übung 3 — [3 Punkte]

Berechnen Sie die Determinante von die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Übung 4 — [5 Punkte]

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, mit $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. Warum können wir sicher sein, dass M invertierbar ist ? [2 Punkt]
2. Berechnen Sie die Inverse Matrix von M. [3 Punkte]

Prüfung vom 26 März 2021

Übung 1:

Wir haben $\dfrac{z-5}{z+5} = z \iff z-5 = z(z+5)$

$\iff 0 = z^2 + 5z - z + 5 \iff 0 = z^2 + 4z + 5$

Hier $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = -4 = (2i)^2$

Also $z = \dfrac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$

Und die Lösungen sind

$\{-2+i \;, -2-i\}$.

Über $\mathbb{R}$ gibt es keine Lösung.

Übung 2:

$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \times 2xy$

1. Wir suchen $(x+iy)^2 = \Delta = -8 + 6i$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left((x+iy)^2\right) = x^2 - y^2 = -8$,

$\mathrm{Im}\left((x+iy)^2\right) = 2xy = 6$,

und $|(x+iy)^2| = x^2 + y^2 = |-8+6i| = \sqrt{8^2+6^2}$

$= \sqrt{100} = 10$.

Also wir haben den System:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ x^2 + y^2 = 10 & (2) \\ 2xy > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$(1)-(2)$ $-2y^2 = -18 \Rightarrow y = \pm 3$

$(1)+(2)$ $2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

Und x und y haben dasselbe Vorzeichen

Also die Quadratwurzeln sind $\underline{1+3i}$ und $\underline{-1-3i}$

② Wir lösen $2z^2 + (1-5i)z - 2 - 2i = 0$

Also $\Delta = (1-5i)^2 - 4 \times 2 \times (-2-2i)$

$$= 1 - 25 - 10i + 16 + 16i$$

$$= -8 + 6i$$

Also wir haben:

$$z = \frac{-1+5i \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{-1+5i \pm (1+3i)}{4}$$

Also die Lösungen von die Gleichung sind:

$$\frac{-1+5i+1+3i}{4} = \boxed{2i}$$

und $$\frac{-1+5i-1-3i}{4} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$$

③ Man hat $2i = \underline{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$

und $$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

Übung 3:

- $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = Z_2 - 3Z_3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

- $\det(B) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -12$

Übung 4:

(1) Wir haben $\det(M) = a^3 \neq 0$, weil $a \in \mathbb{R}^*$.

Also M ist invertierbar.

(2) $co(M) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ b^2 & -ab & a^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t co(M) = \begin{pmatrix} a^2 & -ab & b^2 \\ 0 & a^2 & -ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

Dann $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \, {}^t co(M) = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 & b^2/a^3 \\ 0 & 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$