Prüfung von Algebra 2

Freitag 4 Juni 2021

Anleitungen :
Dokumente sind nicht erlaubt. Handys sollen weggelassen werden. Taschenrechner verboten!

Consignes :
Aucun document n'est autorisé. Les portables devront rester éteints. Calculatrices interdites !

Übung 1 [2 Punkte]

Kursfragen : Ergänzen Sie die folgende Sätze

1. Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $i^2 = -1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist der Betrag $|z| = ...$
2. Die Lösungen von $x^2 + (2+i)x + i = 0$ sind ...
3. Geben Sie die Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{3-i}{1+i}$.
4. Eine Matrix A ist orthogonal wenn ...

Übung 2 [2 Punkte]

Lösen Sie mit der polaren Form

$$z^3 = 1 \ .$$

Übung 3 [3 Punkte]

Sei $Z = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass Z invertierbar ist.
2. Berechnen Sie die inverse Matrix von Z.

Übung 4 [3 Punkte]

Sei

$$q = -6 + 8i \ .$$

Berechnen Sie die Wurzeln von q.

Übung 5 [10 Punkte]

Das Ziel dieser Übung ist es, das folgende linear Differentialsystem zu lösen

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} , \tag{$*$}$$

wo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und mit den Anfangsbedingungen

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 2 \quad \text{und} \quad f_3(0) = 1 \tag{1}$$

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie seine Nullstellen. Welche sind die Eigenwerte von A? [2 Punkte]

2. Berechnen Sie die Eigenraüme von A für jeden Eigenwert. Wählen Sie einen Eigenvektor für jeden Eigenraum. [4 Punkte]

3. Wir setzen [2 Punkte]

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Wechsel- oder Übergangmatrix P an so, dass $A = PDP^{-1}$. Berechnen Sie ihre Inverse P^{-1}.

4. Lösen Sie $(*)$ mit (1). [2 Punkte]
Zeigen Sie, dass

$$f_1(t) = 2\sinh(3t) \quad \text{und} \quad f_2(t) = 2e^t$$

Erinnerung:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Übung 2:

Sei $z = r e^{i\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi[$

Also wir haben $z^3 = r^3 e^{3i\theta} = 1$

$r^3 = |1| = 1$. Aber $r > 0$, dann $r = 1$.

Für der argument wir haben: $3\theta = 0 + 2k\pi$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{2k\pi}{3}}$$

Also $\theta \in \left\{ \underset{k=1}{\frac{2\pi}{3}} ; \underset{k=2}{\frac{4\pi}{3}} ; \underset{k=3}{0} \right\}$

Dann sind die Lösungen:

$$\left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} ; e^{i\frac{4\pi}{3}} ; 1 \right\}.$$

Übung 3:

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} Z_1 - iZ_2 \\ \\ Z_3 - iZ_2 \end{array} \begin{vmatrix} 3-i & 0 & 2-i \\ i & 1 & 1+i \\ 4-i & 0 & 3-i \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 3-i & 2-i \\ 4-i & 3-i \end{vmatrix} = (3-i)(3-i) - (4-i)(2-i) = 9 - 1 - 6i - 8 + 1 + 6i$$

$$= \underline{1} \neq 0$$

Also Z ist invertierbar.

$$co(Z) = \begin{pmatrix} +(3-i) & -\,-4 & +(-4+i) \\ -\,i & +(1-i) & -(-i) \\ +(-2+i) & -\,3 & +(3-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-i & 4 & -4+i \\ -i & 1-i & i \\ -2+i & -3 & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow {}^t co(Z) = \begin{pmatrix} 3-i & -i & -2+i \\ 4 & 1-i & -3 \\ -4+i & i & 3-i \end{pmatrix}$$

Also $$\boxed{Z^{-1} = \begin{pmatrix} 3-i & -i & -2+i \\ 4 & 1-i & -3 \\ -4+i & i & 3-i \end{pmatrix}}$$

Übung 4:

(5) Sei $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$ so daß

$$z^2 = 8 - 6i = q.$$

Dann
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |z^2| = |8-6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = Re(z^2) = Re(8-6i) = 8 & (2) \\ 2xy = Im(z^2) = Im(8-6i) = -6 & (3) \end{cases}$$

Also (1) + (2) gibt : $2x^2 = 10 + 8 = 18$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \underline{x = \pm 3}$

und (1) − (2) gibt : $2y^2 = 10 - 8 = 2$

$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \underline{y = \pm 1}$

Wir haben (3) $xy < 0$

Also x und y haben gegenteilen Vorzeichen.

Die Lösungen sind dann $\boxed{z = \pm (3 - i)}$

mit anderen Worten : $\underline{3 - i}$ un $\underline{-3 + i}$

Übung 5:

(1) Das charakteristisches Polynom im X ist

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1 - 8) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)$$

Also gibt es drei Nullstellen $1, -3, 3$, die sind die Eigenwerte von A.
Da A ein 3×3 Matrix ist, ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(2) • Eigenvektoren für 1: Sei $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so, daß $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wir lösen:

$$(A - I_3)v_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ y = -4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,1) = \{\lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{wo} \quad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

• Eigenvektoren für -3: Sei $v_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so, daß $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wir lösen:

$$(A + 3I_3)v_{-3} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,-3) = \{\lambda v_{-3} \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{wo} \quad \boxed{v_{-3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

• Eigenvektoren für 3: Sei $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so, daß $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wir lösen:

$$(A - 3I_3)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,3) = \{\lambda v_3 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{wo} \quad \boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

③ $P = \begin{pmatrix} v_{-3} & v_1 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Und wir wissen, daß $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \, {}^t co(P)$

Wir haben $\det(P) = -2 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 4 = 12$

und $co(P) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t co(P) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Dann $P^{-1} = \dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

④ Die Lösungen sind

$$f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix}$$

Wir haben: $\exp(tA) = P e^{tD} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & -4e^{t} & 0 \\ e^{-3t} & e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8e^{-3t} + 4e^{3t} & -2e^{-3t} + 2e^{3t} & -8e^{-3t} + 8e^{3t} \\ 0 & 12\, e^{t} & 0 \\ -4e^{-3t} + 4e^{3t} & e^{-3t} - 3e^{t} + 2e^{3t} & 4e^{-3t} + 8e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8e^{-3t} + 4e^{3t} & -2e^{-3t} + 2e^{3t} & -8e^{-3t} + 8e^{3t} \\ 0 & 12\, e^{t} & 0 \\ -4e^{-3t} + 4e^{3t} & e^{-3t} - 3e^{t} + 2e^{3t} & 4e^{-3t} + 8e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-3t} + e^{3t} \\ 2e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{t} + e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, sh(3t) \\ 2e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{t} + e^{3t} \end{pmatrix}$$