Devoir Maison : Calculs et mathématiques
à rendre avant le 30 décembre minuit

Exercice 1 (Une suite d'intégrales)

Soit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$$

1. Calculer I_1, I_2 et I_3. On pourra penser à linéariser.
2. Montrez en utilisant un changement de variable que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.
3. Montrez, en utilisant une Intégration Par Partie que :

$$I_n = (n-1)\big(I_{n-2} - I_n\big) \ .$$

   En déduire une définition de I_n par récurence en fonction de I_{n-2}.
4. Montrez alors par récurrence que :

$$I_{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k)!}{(2^k\cdot k!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2k+1} = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1} = \frac{\left(2^k\cdot k!\right)^2}{(2k+1)!}$$

On rappelle que $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$.

Exercice 2 (Décomposition en éléments simples)

Pour chacune des fonctions suivantes,

$$A(x) = \frac{x^4+x^3-7x^2-13x-6}{x^2-3x+2} \qquad B(x) = \frac{x^5+x^2-1}{x^2+4x+4} \qquad C(x) = \frac{x^3+x^2+5}{x^2+6x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Donnez la décomposition en éléments simples.
3. En déduire une primitive.

Exercice 3 (Etude d'une fonction périodique)

Soit f une fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}$$

Faire l'étude complète de la fonction f (Ensemble de définition, dérivée, tableau de variations complet).

On rappelle que si une fonction est périodique de période T il suffit de faire le tableau de variations sur un intervalle de longueur T. Pensez à utiliser un logiciel de tracé graphique.