Devoir maison n° 1

Exercice 1

Donnez la valeur de vérité puis la négation des assertions suivantes :

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + n$

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y + n$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, (x \geq y) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}\right)$

(4) $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (x \geq y) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \geq y\right)$

Solution:

(1) Il suffit de prendre $x = 0$ et $y = 1/2$ et on voit que la proposition est fausse.
Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x \neq y + n$

(2) Le nombre $y = x - n$ convient. Cela est possible car le quantificateur "$\exists$" arrive après "$\forall$". La valeur de y peut donc dépendre de celles de x et n.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y + n$

(3) Il suffit de prendre $x = 1$ et $y = -1$ et on voit que la proposition est fausse. On rappelle que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et non sur $\mathbb{R}^*$.
Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x \geq y) \wedge \left(\frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$

(4) Le nombre $y = 0$ convient puisque $(x \geq 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \geq 0\right)$.
Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x \geq y) \wedge \left(\frac{1}{x} < y\right)$

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes et leur négation :

(1) f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(2) $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

(3) $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 0 par valeurs positives.

(4) f admet un maximum en a.

(5) f est borné.

(6) f est majorée ou minorée.

Solution:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ (x \geq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y))$
Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x \geq y) \wedge (f(x) < f(y))$

(2) $\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists X \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \geq X,\ f(x) \geq M$
Négation : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \geq X$ tel que $f(x) < M$

(3) $\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists X \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in]0, X],\ f(x) \geq M$
Négation : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in]0, X]$ tel que $f(x) < M$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(a) \geq f(x)$
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(a) < f(x)$

(5) $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ m \leq f(x) \leq M$
Négation : $\forall m, M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^*$ tels que $(M < f(x)) \vee (f(x) < m)$

(6) $\Big(\exists y \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (f(x) \leq y)\Big) \vee \Big(\exists y \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^* (y \leq f(x))\Big)$
Négation : $\Big(\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^*$ tels que $(f(x) > y)\Big) \wedge \Big(\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^*$ tels que $(y > f(x))\Big)$

Exercice 2

Soient A, B, C trois propositions. Donnez le tableau de vérité des propositions suivantes :

(1) $\Big((A \wedge B) \Rightarrow C\Big) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$

(2) $\Big((A \vee B) \Rightarrow \neg C\Big) \Rightarrow \Big((A \wedge B) \vee C\Big)$

Solution:

(1) On a :

$$\Big((A \wedge B) \Rightarrow C\Big) \Rightarrow (A \vee B \vee C) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big((A \wedge B) \wedge \neg C\Big) \vee (A \vee B \vee C)$$

A	B	C	$A \wedge B \wedge \neg C$	$A \vee B \vee C$	$\Big((A \wedge B) \Rightarrow C\Big) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

(2) On a :

$$\Big((A \vee B) \Rightarrow \neg C\Big) \Rightarrow \Big((A \wedge B) \vee C\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big((A \vee B) \wedge C\Big) \vee \Big((A \wedge B) \vee C\Big)$$

A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge B) \vee C$	$\Big((A \vee B) \Rightarrow \neg C\Big) \Rightarrow \Big((A \wedge B) \vee C\Big)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F