Devoir maison n° 2

Exercice 1

Cherchez les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

Solution: Analyse :
Supposons que f vérifie cette équation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $y = 1 - x$. Il est clair que y peut alors être n'importe quel élément de $\mathbb{R}$ en prenant $x = 1 - y$. On a aussi en remplaçant dans l'équation :

$$f(1-y) + f(y) - yf(y) = 2 - y$$

Donc en mutlipliant par y membre à membre :

$$yf(1-y) + yf(y) - y^2 f(y) = 2y - y^2 \tag{1}$$

Or d'après l'équation de l'énoncé :

$$yf(1-y) = 1 + y - f(y)$$

On remplace alors dans (2) et on a :

$$1 + y - f(y) + yf(y) - y^2 f(y) = 2y - y^2 \iff (-y^2 + y - 1)f(y) = -y^2 + y - 1 \tag{2}$$

Or comme $-y^2 + y - 1 \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on peut diviser par ce nombre et on trouve que

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 1$$

Synthèse :
Vérifions que la fonction $f : x \mapsto 1$ est bien solution de cette équation. On remplace dans l'équation :

$$1 + x \cdot 1 = 1 + x$$

Ce qui est bien vrai.

Exercice 2

On utilise dans cet exercice le raisonnement par récurrence.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(2) Calculer $a_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2$.

Solution:

(1) On utilise un raisonement par récurrence dans chaque cas :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  Initialisation :
  1 est bien égal à $\frac{1(1+1)}{2}$
  On veut montrer
  $$P(n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$
  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Or si $P(n)$ est vraie :
  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
  d'où $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  Initialisation :
  1^2 est bien égal à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$
  On veut montrer
  $$P(n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$
  Hérédité :Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Or si $P(n)$ est vraie :
  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1) \cdot \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\ &= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = (n+1) \cdot \frac{(2n+3)(n+2)}{6}\end{aligned}$$
  d'où $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
  Initialisation :
  1^3 est bien égal à $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$
  On veut montrer
  $$P(n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Hérédité :Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Or si $P(n)$ est vraie :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} \\ &= (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

d'où $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

2 On utilise les résultats obtenus :

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} 4k^2 + 4k + 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \frac{2n(2n+1)+6n+3}{3} \\ &= (n+1) \cdot \frac{4n^2+8n+3}{3}\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $1 \in A$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1) \in A \Rightarrow n \in A$

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

Solution: A est inclus dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que tout élément de $\mathbb{N}^*$ est inclus dans A. On veut donc montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : n \in A$.
Initialisation : $1 \in A \longrightarrow$ Vrai d'après l'énoncé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Or si $P(n)$ est vraie :

$$\begin{aligned}
n \in A &\Rightarrow 2n \in A \\
&\Rightarrow 2n-1 \in A \\
&\Rightarrow 2n-2 \in A \\
&\Rightarrow 2n-3 \in A \\
&\dots \\
&\Rightarrow 2n-(n-3) = n+3 \in A \\
&\Rightarrow 2n-(n-2) = n+2 \in A \\
&\Rightarrow 2n-(n-1) = n+1 \in A
\end{aligned}$$

d'où $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.