Devoir maison n° 3 : A rendre avant le 31 décembre minuit

• DM falculatif : A rendre si vous voulez vous entrainer à faire des exercices tout en vous les faisant corriger individuellement. Cela permet de voir, entre autre, si votre rédaction est bonne.
• Vous pouvez le faire à plusieurs (c'est même mieux). Mais ne rendez qu'une copie (avec tous les noms). J'enverrai la correction de la copie à tous.
• Ce n'est pas la peine de recopier le DM d'un autre. Je n'ai que faire de savoir qui l'a fait et qui ne l'a pas fait. Je ne corrige pas l'examen final de toute façon.
• A rendre sur Teams en message privé. La copie doit être en un unique pdf.

Exercice 1

Soient f et g les applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x - 2$.

1. f et g sont-elles bijectives ?
2. Si oui, qu'est ce qui justifie, sans calculs, que $g \circ f$ est bijective ? (on déterminera explicitement $g \circ f$, en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée).
3. Que vaut alors $(g \circ f)^{-1}$?

Exercice 2

L'application $f(x, y) = (5x - 2y, x - y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui même est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3 (Partiel de Novembre 2019)

Soient $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 < 19\}$ et $B = \{-2, -1, 3, 5\}$. Exprimer explicitement les ensembles suivants :

1. $A \setminus B$
2. $B \setminus A$
3. $A \cap B$
4. $A \cup B$

Exercice 4 (Paradoxe de Russell (ou du barbier))

On note $X = \{x \mid x \notin x\}$. Montrer que :

$$X \in X \Leftrightarrow X \notin X \ .$$

En déduire une contradiction quant à l'existence de cet ensemble.

Pour ceux qui veulent aller plus loin. Un exercice intéressant qui prouve que si on a deux injections entre 2 ensembles (dans les deux sens) alors il existe une bijection entre ces deux ensembles.

Exercice 5 (Théorème de Cantor-Bernstein)

Le but de cet exercice est de démontrer un célèbre théorème de Cantor et Bernstein : si E et F sont des ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.
On se donne donc deux ensembles E et F et deux applications injectives $i : E \to F$ et $j : F \to E$. On note par ailleurs

$$A_0 = E \setminus j(F),\ A_1 = (j \circ i)(A_0), \ldots, A_{n+1} = (j \circ i)(A_n)$$

et

$$B = \bigcup_{n \geq 0} A_n,\ C = E \setminus B\ .$$

1. Exemple dans le cas fini. On suppose ici que G et H sont deux ensembles finis.
   (a) Montrer qu'il existe une application injective de G vers H si et seulement si $\mathsf{Card}\ G \leq \mathsf{Card}\ H$. ($\mathsf{Card}\ G$ = Nombre d'éléments de G)
   (b) Montrer qu'il existe une application surjective de G vers H si et seulement si $\mathsf{Card}\ G \geq \mathsf{Card}\ H$.
   (c) Montrer que G et H sont en bijection si et seulement si $\mathsf{Card}\ G = \mathsf{Card}\ H$.
   (d) En déduire, le théorème de Cantor-Bernstein pour des ensembles finis.
2. Construction de l'application.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in C$, il existe un unique $z \in F$ tel que $x = j(z)$. On notera cet élément $\phi(x)$.
   (b) Pour $x \in B$, on note $\phi(x) = i(x)$. Démontrer que l'on a ainsi bien défini une application $\phi : E \to F$.
3. Injectivité de ϕ.
   (a) Démontrer que les restrictions de ϕ à B et à C sont injectives. Considérons maintenant $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$.
   (b) Démontrer que $x = (j \circ i)(y)$.
   (c) En déduire que ϕ est injective.
4. Surjectivité de ϕ. Démontrer que ϕ est surjective.
5. Un exemple. Pour $E = \mathbb{N}$, $F = \{2, 3, \ldots, \}$, soient

   $$i : E \to F,\ n \mapsto n + 4$$

   et

   $$j : F \to E, n \mapsto n\ .$$

   Déterminer les ensembles A_n, B, C et l'application ϕ.