Université de Lorraine - Site de Metz
Département de mathématiques

Fondements des mathématiques - Contrôle du 14 janvier 2021

Exercice 1 (**? points**).

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soient A une partie non vide de E et B une partie non vide de F. Montrer l'équivalence suivante

$$A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \Longleftrightarrow f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

Exercice 2 (**? points**).

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = e^{2x} + e^x.$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation du second degré en X suivante
$$X^2 + X - y = 0.$$
2. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'équation
$$y = f(x)$$
admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra poser $X = e^x$ et utiliser le résultat de la question précédente.
3. En déduire que f est une bijection.

Exercice 3 (**? points**).

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

Exercice 4 (**? points**).

Si X est un ensemble quelconque et Y une partie de X, on note par $\complement_X Y$ le complémentaire de Y dans X.
Soient deux ensembles non vides E et F. Soient A une partie non vide de E et B une partie non vide de F. Montrer que

$$\complement_{E\times F} A \times B = (E \times \complement_F B) \cup (\complement_E A \times F).$$

Exercice 5 (**? points**). Soit E un ensemble et f une application de E dans E. On pose

$$X = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid f^{-1}(f(A)) = A\}$$

1. Montrez que $\emptyset$ et $E \in X$.
2. Montrez que si A et B appartiennent à X, alors $A \cup B \in X$.
3. Montrez que si A et B appartiennent à X, alors $A \cap B \in X$.
4. Montrez que $X = \mathcal{P}(E)$ si et seulement si f est injective.

<u>Exercice</u> 6 (? points). Soit A un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$. On pose

$$X_A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists a \in A,\ x = na\}$$

X_A est l'ensemble des multiples non-nuls des éléments de A.

1. Montrez que X_A est non vide si et seulement si A est non vide.
2. Montrez que si $1 \in A$ alors $X_A = \mathbb{N}^*$.
3. Montrez que pour tout $A, B \subset \mathbb{N}$, si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $X_A \cap X_B \neq \emptyset$.
4. Montrez que la réciproque est fausse. On pourra montrer la contraposée (de la réciproque).