Université de Lorraine-Site de Metz — Année universitaire 2020-2021
Portail Mathématiques -Informatique

Fondements des mathématiques

Feuille de TD 1 - Logique et Raisonnements

1 - Connecteurs logiques

(∗) Exercice 1

Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.
(1) $(2+2=4) \wedge (1+1=3)$
(2) $(2+2=4) \vee (1+1=3)$.
(3) $(2+2=4) \Longrightarrow (1+1=3)$
(4) $(1+1=3) \Longrightarrow (2+2=4)$
(5) La Terre est plate $\Longrightarrow$ je vais réussir
(6) Le Soleil n'est pas plus chaud que la terre $\Longrightarrow$ je suis Einstein

(∗) Exercice 2

1) Soient a, b et c trois nombres réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

(1) $P : a \leq -2$ ou $a \geq 3$. (2) $Q : a \leq 5$ et $a > -1$. (3) $R : a \leq 5$ ou $c > 3$.

2) Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.
(1) (5 est premier) ou (4 est pair).
(2) (5 est premier) et (4 est impair).
(3) (4 est premier) ou (5 est pair).

(∗∗) Exercice 3

Remplacez dans chaque expression le symbole $*$ par l'un des opérateurs suivants : $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.
Soient x, y et z sont trois nombres réels.
P : $(x > 0) * (x > 5)$ Q : $(x = 3) * (x^2 = 9)$ R : $(x \times z = y \times z) * (x = y)$ S : $(x + z = y + z) * (x = y)$

(∗) Exercice 4

(Extrait de partiel novembre 2015)
Dans les phrases qui suivent "Nancy" désigne le prénom d'une femme. Déterminer parmi les raisonnements suivants ceux qui sont justes. Justifier vos réponses.

1) Tous les lorrains sont fans du FC Metz. Or Nancy est fan du FC Metz. Donc Nancy est lorraine.

2) Nancy est lorraine. Or tous les lorrains sont fans du FC Metz. Donc Nancy est fan du FC Metz.

3) Aucun lorrain n'est fan du FC Metz. Or Nancy n'est pas fan du FC Metz. Donc Nancy est lorraine.

4) Aucun lorrain n'est fan du FC Metz. Or Nancy est lorraine. Donc Nancy n'est pas fan du FC Metz.

(∗∗) Exercice 5

Soient P, Q et R trois propositions. Dans chacun des cas suivants, les propositions sont-elles la négation l'une de l'autre ?

(1) $(P \wedge Q)$; $\Big((\rceil P) \wedge (\rceil Q)\Big)$. (2) $(P \Longrightarrow Q)$; $\Big((\rceil Q) \Longrightarrow (\rceil P)\Big)$. (3) $(P \vee Q)$; $(P \wedge Q)$.

(∗) Exercice 6

(**Extrait de juin 2019**). Un étudiant (qui dit toujours la vérité) dit :
"S'il y a un film ce soir à la télé, je le regarde"
"Quand je regarde un film j'éteins mon téléphone".
Le soir arrive. Dire si chacun des raisonnements suivants est logiquement correct.
1) L'étudiant dit : "Mon téléphone est éteint. Il y avait donc un film à la télé".
2) Mon téléphone est allumé. Je ne regarde donc pas de film à la télé.

($*$) <u>Exercice 7</u>

Trois frères André (A), Bernard (B), Claude (C), ont chacun une profession et une seule : chirurgien (c), dentiste (d) , pharmacien (p). On sait que

$$A \text{ est } (c) \Longrightarrow B \text{ est } (d),\ A \text{ est } (d) \Longrightarrow B \text{ est } (p)$$
$$B \text{ est non}(c) \Longrightarrow C \text{ est } (d),\ C \text{ est } (p) \Longrightarrow A \text{ est } (d)$$

Déterminer la profession de chacun.

($*$) <u>Exercice 8</u>

Extrait du partiel de de novembre 2017.
Écrire la contraposée de la proposition P suivante :

P : Si un nombre entier est divisible par 4, alors son chiffre des unités vaut 4.

2 - Tables de vérité

($*$) <u>Exercice 9</u>

Soient P et Q deux propositions.
1) Donner les tables de vérité de :
a) $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$ (faire figurer dans la table une colonne avec les valeurs de $(P \vee Q)$ et une colonne avec les valeurs de $(Q \wedge P)$).
b) $(\rceil P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ (faire figurer dans la table une colonne avec les valeurs de $(\rceil P \Rightarrow P)$).
2) Ecrire la négation de $P \Rightarrow \rceil Q$.
3) Ecrire la contraposée de $\rceil\ P \Rightarrow \rceil Q$.

($**$) <u>Exercice 10</u>

Soient les propositions P, Q et R.
(1) Donner les tables de vérité de $[(P \vee Q) \vee R]$ et de $[P \vee (Q \vee R)]$. Que conclure ?
(2) Donner la table de vérité de $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$.
(3) Donner la table de vérité de $[(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R]$ et celle de $[P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)]$.
Que constatez-vous ?
(4) Donner la table de vérité de $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longleftrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow R)$.
(5) Donner les tables de vérité de $[(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow R]$ et $[P \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow R)]$.
Que constatez-vous ?

($**$) <u>Exercice 11</u>

1) Soient p, q et r des assertions. Ecrire la table de vérité de l'assertion

$$(A): \quad ((p \Longrightarrow r) \vee (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow ((p \vee q) \Longrightarrow r)$$

où le symbole $\vee$ désigne la disjonction "ou".
2) Montrer que cette assertion est équivalente à $(B): \ (p \Longleftrightarrow q) \vee r$.

3 - Utilisation des quantificateurs

($*$) <u>Exercice 12</u>

Extrait du partiel de de novembre 2017.
Écrire avec des quantificateurs la négation de la proposition suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |\frac{1}{n}| \leq \epsilon$$

($*$) <u>Exercice 13</u>

Ecrire la négation des propositions suivantes :
(1) "Toutes les voitures rapides sont rouges."
(2) "Il existe un mouton français dont au moins un côté est noir".
(3) "Tout triangle rectangle possède un angle droit".

(4) "Tous les habitants de la rue Belle Isle qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

(**) EXERCICE 14

Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

(1) Le carré de tout nombre réel est positif ou nul.

(2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

(3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

(4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

(5) Il existe un entier multiple de tous les autres.

(6) Entre deux réels distincts, il existe un nombre rationnel.

(*) EXERCICE 15

Pour chacune des propositions logiques suivantes, écrire leur négation, puis établir la valeur de vérité de la proposition de départ et de sa négation (en justifiant vos réponses).
1) On se donne l'ensemble d'entiers $A = \{6; 18; 23; 9; 2; 3\}$.
On considère la proposition P_1 : $\forall k \in A$, k est un diviseur de 18.
2) On se donne l'ensemble d'entiers $B = \{19; 24; 21; 30; 29\}$.
On considère la proposition P_2 : $\exists n \in B$, $n < 19$.
3) On considère la proposition P_3 : $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $|x - y| \geq 1$.

(* * *) EXERCICE 16

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :
1) (i) f est majorée, (ii) g est bornée
2) (i) f est impaire, (ii) g n'est pas paire
3) (i) f ne s'annule jamais, (ii) g n'est pas la fonction nulle
4) (i) f est périodique, (ii) g n'est pas périodique
5) f est strictement décroissante
6) f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts
7) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
8) f est inférieure à g.
9) les valeurs de f et g sont différentes en tout point de $\mathbb{R}$
10) les fonctions f et g sont distinctes.

(**) EXERCICE 17

Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.

(1) $(\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2 = 1$.

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}),\ y = x^2$.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}),\ x = y^2$.

(4) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}),\ y = x^2$.

(5) $\forall x \in \mathbb{Z},\ 2x + 1 = 3$.

(6) $\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 + 1 = 0$.

(* * *) EXERCICE 18

Déterminer les réels x pour lesquels **l'implication** suivante est vraie

$$\forall y \in [0, 1], \quad (x \geq y \Longrightarrow x \geq 2y)$$

4 - Raisonnement par analyse et synthèse

(**) Exercice 19

Répondre aux questions suivantes en mettant en évidence un raisonnement par analyse-synthèse :
1) Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donnez la décomposition de la fonction exponentielle. On appelle sa partie paire le cosinus hyperbolique et sa partie impaire le sinus hyperbolique.
2) Déterminer les réels x vérifiant $x \geq -2$ et $\sqrt{x+2} = x$.
3) Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
4) Déterminer les réels x tels que $|2x+1| = x$.

(**) Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ à valeur dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

Trouvez par un raisonnement d'analyse et synthèse la réciproque de f, c'est dire, la fonction g telle que $f \circ g(x) = x$.

$(* * *)$ Exercice 21

Cherchez les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

$(* * *)$ Exercice 22

Cherchez les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

5 - Raisonnement par disjonction de cas

$(*)$ Exercice 23

Montrez en séparant les différents cas, que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

est divisible par 2. Faire de même avec

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

divisible par 3. Proposez une généralisation.

$(*)$ Exercice 24

Extrait Examen Seconde Session Juin 2020
En utilisant un raisonnement par disjonction de cas, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$|x-1| + |2x-3| = 6.$$

(**) Exercice 25

Soit n un entier qui n'est pas divisible par 5. Montrer en utilisant un raisonnement par disjonction des cas que 5 divise $n^4 - 1$.

$(*)$ Exercice 26

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + 4yz + 2z & = 0 \\ x + 2xy + 2z^2 & = 0 \\ 2xz + y^2 + y + 1 & = 0 \end{cases}$$

6 - Raisonnements par contraposition et par l'absurde

(∗) Exercice 27

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété P suivante pour $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

P : Si l'entier (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

(1) Définir la contraposée d'une implication $(A \Longrightarrow B)$, A et B sont deux propositions.

(2) Ecrire la contraposée de la proposition P.

(3) Démontrer qu'un entier naturel impair n s'écrit $n = 4k + r$ avec k un entier naturel et $r \in \{1, 3\}$.

(4) Prouver alors la contraposée de P.

(∗∗) Exercice 28

1) Démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2) On considère l'implication I suivante : $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$.

a) Donner la proposition contraposée de l'implication I et la démontrer.

b) Que déduit-on de la valeur de vérité de I ?

3) Le nombre $1 + \sqrt{2}$ est-il rationnel ou irrationnel ?

(∗∗) Exercice 29

(1) En utilisant un raisonnement par l'absurde monter que : si $a \in Q$ et $b \notin Q$ alors $a + b \notin Q$.
(2) Soit a un réel. On considère l'assertion (A) suivante : "si pour tout $\epsilon > 0$, $a \leq \epsilon$ alors $a \leq 0$".
(a) Ecrire l'assertion (A) sous forme d'une implication.
(b) Enoncer la contraposée de (A) et prouvez là.
(c) En déduire que l'assertion (A) est vraie.

(∗ ∗ ∗) Exercice 30

Nombres dans un intervalle et distance
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $(n+2)$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ de $[0,1]$ vérifiant

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq 1$$

On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.
1. Ecrire à l'aide des quantificateurs et des valeurs de $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété.

(∗) Exercice 31

En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :

(1) Un rectangle a pour aire 170 m^2. Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m.

(2) Si n est le carré d'un nombre entier non nul, alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

7 - Raisonnement par récurrence

(∗) Exercice 32

Extrait Partiel Novembre 20219
Montrer par récurrence les propositions suivantes :
1) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $2^n > n$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, 4 divise $3^n - (-1)^n$.

($*$) Exercice 33

Extrait Examen Seconde Session Juin 2020
On pose
$$u_0 = 0, \qquad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = 2\,u_n - (-1)^n.$$

1) Calculer u_1 puis montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq -1$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{3}((-1)^n - 2^n)$.

($**$) Exercice 34

1) Pour tout entier naturel n et pour tous nombres complexes a et b, montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{Formule du binôme de Newton}$$

où $\dbinom{n}{k}$ est le coefficient binomial $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
2) (**Extrait de juin 2019**). Soit a un nombre réel. Montrer par récurrence la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (a-1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) = a^n - 1$$

On rappelle que $a^0 = 1$.

($**$) Exercice 35

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2.$$

2) Calculer $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2$.

($**$) Exercice 36

Soit n un entier non nul. Démontrer par récurrence que $(n+1)! \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$.

($**$) Exercice 37

Soient (F_n) la propriété $\Big(n^2 \leq 2^n\Big)$ et (P_n) la propriété $\Big(n < 2^{n-1}\Big)$.

1) Déterminer si (F_n) est vraie ou fausse pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

2) Déterminer si (P_n) est vraie ou fausse pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

3) Soit n un entier naturel. Montrer que si (F_n) et (P_n) sont vraies alors (F_{n+1}) est vraie.

4) Montrer par récurrence sur n que (P_n) est vraie pour $n \geq 3$.

5) Démontrer que (F_n) est vraie pour $n > 3$. (Indication : on pourra faire un raisonnement par récurrence et utiliser 3) et 4)).

($***$) Exercice 38

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les propriétés suivantes :
1. $1 \in A$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \in A \Rightarrow 2n \in A$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1) \in A \Rightarrow n \in A$

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

8 - Un peu de logique

(∗) Exercice 39

Grille de Sudoku

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	8	1		6	9				
B		9				4	6	8	
C	6		5			1	2	9	
D	9					6		1	3
E		2						6	
F	4	7		3					9
G		4	7	1			9		2
H		8	1	9				4	
I					4	7		3	8

Une grille de Sudoku est un tableau rectangulaire à 9 lignes et 9 colonnes formant 9 petits carrés. Chaque case de cette grille est remplie par les chiffres de 1 à 9 sans répétition ni dans les lignes ni dans les colonnes ni dans les 9 petits carrés. Les lignes et colonnes contenant des lettres servent à repérer les cases. Ainsi, la case AA est occupée par le chiffre 8, AB par 1, la case CG contient le chiffre 2 alors que la case GC contient le chiffre 7. Chaque grille possède une solution. Le but du jeu est de trouver, par des déductions logiques la solution.
Ainsi, en regardant le 9 se trouvant dans les colonnes D et E et le 9 se trouvant dans la ligne F, on déduit que la case EF doit contenir un 9.
1) Remplissez la colonne H
2) Déterminer le 1 et le 7 de la colonne A.
3) Quelles sont les possibilités pour la case DB ? Remplissez alors la colonne B.
4) Montrer qu'un 9 se trouve dans la case IC, remplissez la case GA et par suite la ligne G.
5) Montrer que FC contient un 6, remplissez le carré la contenant ainsi que la colonne C.
6) Par des déductions logiques, complétez la grille.