Université de Lorraine-Site de Metz — Année universitaire 2020-2021
Portail Mathématiques -Informatique

Fondements des mathématiques

Feuille de TD 2 - Théorie des ensembles

Premières définitions et ensembles concrets

(∗) Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c\}$. Peut-on écrire les propositions suivantes : $a \in E$? $a \subseteq E$? $\{a\} \subseteq E$? $\{a\} \in E$? $\emptyset \in E$? $\emptyset \subseteq E$? $\{\emptyset\} \subseteq E$? $d \notin E$? $d \not\subseteq E$? $\{d\} \notin E$? $\{d\} \not\subseteq E$?

(∗) Exercice 2

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

1. Ecrire dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres "multiples de 2 et multiples de 6".
2. Ecrire dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres "multiples de 2 ou multiples de 6".
3. Quelle est l'intersection de l'ensembles des multiples de 3 et de l'ensemble des multiples de 2 ?
4. Quel est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble des nombres "pairs ou non multiples de 5" ?

(∗) Exercice 3

Soit $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{0, 1, 2, 3\}$ et $G = \{0, 4\}$.

1. Décrire les ensembles $E \cap F$, $E \cup F$, $E \cap G$, $\complement_F E$ (complémentaire de E dans F), $(G \cup F) \setminus E$ (c'est $G \cup F$ privé de E).
2. A-t-on $G \not\subset F$? $E \subsetneq F$ (inclusion stricte) ? Justifiez.

(∗) Exercice 4

On dit qu'un ensemble est défini en extension lorsque l'on cite explicitement tous ses éléments (éventuellement avec des ...), et en compréhension lorsque l'on caractérise les éléments de l'ensemble par une propriété. Par exemple, l'ensemble P des entiers naturels pairs peut être défini en extension par $P = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$, ou en compréhension par $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ou encore $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$.

1. Définir en extension et compréhension :
   (a) l'ensemble I des entiers naturels impairs
   (b) l'ensemble A des entiers relatifs compris (au sens large) entre -2 et 3
   (c) l'ensemble des nombres premiers.
2. Définir en compréhension
   (a) l'intervalle $]0; 1]$.
   (b) l'ensemble des fonctions paires
   (c) l'ensemble des nombres rationnels

(∗) <u>EXERCICE 5</u> **(Extrait de novembre 2018)**

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 10\}$. On considère les trois sous-ensembles suivants de E :

$$A = \{1, 3, 5\},\ B = \{6, 8, 10\},\ C = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < n \leq 10\}$$

1. Déterminer explicitement $(A \cup B) \cap C$.
2. Déterminer explicitement $\complement_E A$.
3. Déterminer explicitement $B \times A$.

(∗∗) <u>EXERCICE 6</u> **(Extrait de novembre 2014)**

Soient $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{0, 2\}$.

1. Déterminer tous les ensembles $X \subseteq E$ tels que $X \cup A = E$.
2. Déterminer tous les ensembles $Y \subseteq E$ tels que $\complement_E A \subseteq Y$.
3. Comment expliquer les résultats trouvés en 1 et 2 ?

(∗∗) <u>EXERCICE 7</u> **(Extrait partiel novembre 2015)**

Dresser la liste de toutes les inclusions et égalités entre les ensembles suivants :

1. $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.
2. $G = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ et } b \text{ pair}\}$.
3. $K = \mathbb{Q}$.

Opérations sur les ensembles - Propriétés

(∗) <u>EXERCICE 8</u>

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Simplifier les ensembles suivants :

1. $A \cap (A \cup B)$
2. $A \cup (A \cap B)$
3. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$
4. $(A \cup B) \cap (B \cap C) \cap (C \cup A)$
5. $A \cap (\complement_E A \cup B)$
6. $A \cap B \cap (B \cup \complement_E C)$

(∗) <u>EXERCICE 9</u>

Soient A, B et C trois ensembles.

1. Démontrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.
2. Montrer que A et B sont disjoints si et seulement si $\complement_E A \cup \complement_E B = E$.

3. Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subseteq B \subseteq C$.
4. Démontrer que

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Longleftrightarrow (B = C)$$

(**) Exercice 10 **(Extrait de novembre 2018)**

Soient E un ensemble et A_1, A_2 et A_3 des sous-ensembles de E. Déterminer à l'aide des ensembles A_i, avec $i \in \{1, 2, 3\}$, et des opérations entre ces ensembles, à quel ensemble un élément x appartient lorsque :

1. x appartient à tous les A_i.
2. x n'appartient ni à A_1 ni à A_2.
3. x appartient à au moins deux des A_i.

(*) Exercice 11

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les égalités suivantes :

1. $A \backslash B = A \cap (\complement_E B)$.
2. $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

(*) Exercice 12

Soient A, B, C et D quatre ensembles. Montrer les propriétés suivantes :

1. $(A \subseteq C \text{ et } B \subseteq D) \Longleftrightarrow (A \times B \subseteq C \times D)$ (On suppose que A et B sont non vides).
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$.

(**) Exercice 13 **(Examen de Janvier 2020)**

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $(A \cap B) \cap \big(\complement_E (A \cap C)\big) = A \cap \big(B \cap (\complement_E C)\big)$.
2. Montrer que : $\Big((A \cup B) \cap \big(\complement_E (A \cap B)\big)\Big) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (A = B)$

(**) Exercice 14 **(Rattrapage de juin 2020)**

Soit E un ensemble non vide. Soient A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $(A = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$.
2. Montrer que : $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C))$.
3. On suppose que : $B \subset A \subset C$. Soit X une partie de E. Montrer que :

$$(A \cap X = B \text{ et } A \cup X = C) \Leftrightarrow (X = B \cup ((E \setminus A) \cap C)) \ .$$

Ensemble des parties d'un ensemble

(∗) EXERCICE 15

Ecrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

(∗∗) EXERCICE 16

Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que si $E \subset F$ alors $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Parmi les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, lequel est inclus dans l'autre ? A quelle condition a-t-on l'égalité ?
3. En prenant $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 4\}$, montrez que l'égalité n'est pas vraie en général.
4. Que penser de $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$? A-t-on toujours l'égalité dans ce cas ?

(∗∗) EXERCICE 17

Soient E et F deux ensembles. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$?

S'entraîner ... et aller plus loin

(∗) EXERCICE 18

Soit $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $C = \{7, 8, 9, 10\}$. Donnez les ensembles $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$, $A \cup B$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap C$, $\mathbb{N} \setminus A \cup B$.

(∗) EXERCICE 19

Soit $E_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$, $E_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$, et $E_6 = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 6k\}$.

1. Démontrer que $E_2 \cap E_3 = E_6$.
2. Que vaut $E_2 \cup E_6$?

(∗) EXERCICE 20

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \ ; \ B = \{1, 3, 5, 7\} \ ; \ C = \{2, 4, 6\} \ ; \ D = \{3, 6\} \ .$$

1. Déterminer $B \cap D$ et $C \cap D$.
2. Déterminer $B \cup C$ et $C \cup D$. Une des ces réunions est-elle disjointe ?
3. Déterminer $C \Delta D$.
4. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

(∗) <u>EXERCICE 21</u> **(Partiel de Novembre 2019)**

Soient $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 < 19\}$ et $B = \{-2, -1, 3, 5\}$. Exprimer explicitement les ensembles suivants :

1. $A \setminus B$
2. $B \setminus A$
3. $A \cap B$
4. $A \cup B$

(∗) <u>EXERCICE 22</u>

Écrire en extension (voir EXERCICE 4) les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
&A = \{\text{nombres entiers compris entre } -\frac{1}{2} \text{ et } \pi\}\\
&B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ x = pn \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}\\
&C = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ 26 = kn\}\\
&D = \{f \text{ fonctions dérivables sur } \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x \text{ et } f(0) = 0 \text{ ou } 1\}\\
&E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } y = 2 - x\}
\end{aligned}$$

(∗∗) <u>EXERCICE 23</u>

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. On note par $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B.

1. Calculer $A\Delta A$; $A\Delta\emptyset$; $A\Delta E$; $A\Delta\complement_E A$.
2. Montrez que
   (a) $(\complement_E A)\Delta(\complement_E B) = A\Delta B$,
   (b) $\complement_E(A\Delta B) = (\complement_E A)\Delta B = A\Delta(\complement_E B)$.
3. Montrer que
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$
4. Démontrer que
$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$
5. Démontrer qu'en général
$$(A\Delta B) \cup C \neq (A \cup C)\Delta(B \cup C).$$

(∗) <u>EXERCICE 24</u> **(Paradoxe de Russell (ou du barbier))**

On note $X = \{x \mid x \notin x\}$. Montrer que :
$$X \in X \Leftrightarrow X \notin X\ .$$
En déduire une contradiction quand à l'existence de cet ensemble.

(∗) <u>EXERCICE 25</u> **(prérequis : Nombres complexes)**

Soient $E = \mathbb{C}$, $A = \{z \in E \mid |z| \leq 1\}$ et $B = \{z \in E \mid \Im(z) < 1\}$, où $\Im$ est la partie imaginaire. Représenter $\complement_E A,\ \complement_E B,\ A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$ et $A\Delta B$.