Université de Lorraine-Site de Metz
Portail Mathématiques -Informatique

Année universitaire 2020-2021

Fondements des mathématiques

Feuille de TD 3 - Applications

Premiers exemples d'applications

(∗) Exercice 1

On considère les deux applications f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

(∗) Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Calculer $f \circ f(x)$ et $f \circ f \circ f(x)$.
2. Déterminer $\overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ fois}}(x)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}_+$. On pourra utiliser le raisonnement par récurrence.

(∗∗) Exercice 3

Soit E un ensemble. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, soit χ_A l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

χ_A est appelée la fonction caractéristique de A.

1. Montrer que $\chi_{(\complement_E A)} = \chi_E - \chi_A$.
2. Calculer $\chi_{A \cap B}$ en fonction de χ_A et χ_B. Même question pour $\chi_{A \cup B}$.
3. On rappelle que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, calculer $\chi_{A \Delta B}$ en fonction de χ_A et χ_B.

(∗) Exercice 4 **(Extrait de janvier 2017)**

Soient $I =]-1, +\infty[$ et $J =]-\infty, 1[$.

1. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$. Montrer que f est une application de I dans J. (on pourra déterminer le signe de $f(x) - 1$).
2. Pour tout $x \in J$, on pose $g(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$. Montrer que g est une application de J dans I. (on pourra déterminer le signe de $g(x) + 1$).
3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en déduit-on ?

Images, images réciproques

$(*)$ Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer $f(A)$ puis $f^{-1}(f(A))$ dans les cas suivants :

$$A = \{1\}\ ,\ A = [0,1]\ ,\ A = [-1,1]\ ,\ A =]-2,4]$$

2. Déterminer $f^{-1}(B)$ puis $f(f^{-1}(B))$ dans les cas suivants :

$$B = [0,1]\ ,\ B = [-1,4]$$

$(*)$ Exercice 6

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application quelconque.

1. Démontrer que pour toute partie A de E,

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

   A-t-on l'égalité ? (Si l'égalité est fausse en général, on cherchera un contre-exemple)

2. Démontrer que pour toute partie B de F,

$$f(f^{-1}(B)) \subset B\ .$$

   A-t-on l'égalité ? (Si l'égalité est fausse en général, on cherchera un contre-exemple)

$(***)$ Exercice 7

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indéxée par un ensemble I et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble I. Soit f une application de E vers F. Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes (On peut commencer par 2 ensembles) :

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f(E \setminus A_i)$ et $F \setminus f(A_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
5. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}(F \setminus B_i)$ et $E \setminus f^{-1}(B_i)$.

Injection, Surjection, Bijection

(∗) Exercice 8

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$
5. $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$
6. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
7. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$
8. Code : {étudiants français} → {Numéro INE}, qui à chaque étudiant lui associe un numéro INE.

(∗) Exercice 9

1. Soient $E = \{0,1,2,3,4,5\}$ et $F = \{a,b,c,d,e\}$. Donner, s'il existe, un exemple d'application f de E dans F :
   (a) non injective et non surjective.
   (b) non injective et surjective.
   (c) injective et non surjective.
   (d) injective et surjective.
2. Mêmes questions avec $E = \{0,1,2,3,4,5\} = F$
3. Mêmes questions avec $E = F = \mathbb{R}$.

(∗) Exercice 10

Soit f l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-2y, 5x+8y)$$

Montrer que f est bijective. Déterminer f^{-1}.

(∗) Exercice 11

Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

f est-elle injective ? surjective ?

($**$) <u>Exercice 12</u>

Soit h l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{3x}{x^2+1} \ .$$

Soit x un réel non nul. Calculer $h\left(\frac{1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de h ?

($***$) <u>Exercice 13</u>

1. Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans lui même telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \ f(m+n) = f(m) + f(n)$$

   Lesquelles sont injectives ? surjectives ?

2. Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui même. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geq n$$

($*$) <u>Exercice 14</u> **(Extrait de janvier 2019)**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x + 1$.

1. Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
2. f est-elle surjective ? injective ?
3. Reprendre la question 2) si on considère la même application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

($*$) <u>Exercice 15</u>

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = 2e^{-x}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

($*$) <u>Exercice 16</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
2. Déterminer f^{-1} .

($***$) <u>Exercice 17</u>

Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ puis entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Existe-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?

($**$) <u>Exercice 18</u>

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :
   (a) f est injective.
   (b) pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.
   (c) pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
2. Même question pour les assertions suivantes :
   (a) f est surjective.
   (b) pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

($**$) <u>Exercice 19</u> (Applications et ensembles finis)

Soient A, B deux ensembles finis. On note $\mathsf{Card}\ A$ (resp. $\mathsf{Card}\ B$) le nombre d'éléments de A (resp. B). On nomme aussi ce nombre le cardinal d'un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une application injective de A vers B si et seulement si $\mathsf{Card}\ A \leq \mathsf{Card}\ B$.
2. Montrer qu'il existe une application surjective de A vers B si et seulement si $\mathsf{Card}\ A \geq \mathsf{Card}\ B$.
3. Montrer que A et B sont en bijection si et seulement si $\mathsf{Card}\ A = \mathsf{Card}\ B$.
4. Montrer que si $f : A \to B$ est injective et que $\mathsf{Card}\ A \geq \mathsf{Card}\ B$, alors f est bijective.
5. Montrer que si $g : A \to B$ est surjective et que $\mathsf{Card}\ A \leq \mathsf{Card}\ B$, alors g est bijective.

($***$) <u>Exercice 20</u>

On considère 4 ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $h : C \longrightarrow D$. Montrer que

1. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective,
2. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective,
3. $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\iff f, g$ et h bijectives .

Trouvez un contre-exemple aux implications suivantes :

4. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow g$ injective,
5. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow f$ surjective,
6. $g \circ f$ bijective $\Longrightarrow f$ et g bijectives.
7. Soit $k : A \longrightarrow A$ une application vérifiant $k \circ k \circ k = k$. Montrer qu'il y a équivalence entre k injective et k surjective.

S'entraîner ... et aller plus loin

($*$) <u>Exercice 21</u>

L'application $f(x,y) = (3x-4y, -2x-y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui même est-elle injective ? surjective ?

($*$) <u>Exercice 22</u> **(prérequis : Nombres complexes)**

Soient $P = \left\{z \in \mathbb{C} / \Im(z) > 0\right\}$ et $D = \left\{z \in \mathbb{C} / \mid z \mid < 1\right\}$.

1. Montrer que $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une application de P dans D.
2. Montrer que $g(z) = i \cdot \dfrac{1+z}{1-z}$ définit une application de D dans P.
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

($**$) <u>Exercice 23</u> **(prérequis : Nombres complexes)**

Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on pose

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

L'application exponentielle $z \mapsto e^z$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ?

($**$) <u>Exercice 24</u> **(prérequis : Nombres complexes)**

Démontrer que l'application f définie de $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par

$$f(z) = \frac{iz - i}{z+3}$$

est une bijection. Déterminer son application réciproque.

($*$) <u>Exercice 25</u>

Soient f et g les applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = x-2$.

1. f et g sont-elles bijectives ?
2. Si oui, qu'est ce qui justifie, sans calculs, que $g \circ f$ est bijective ? (on déterminera explicitement $g \circ f$, en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée).
3. Que vaut alors $(g \circ f)^{-1}$?

($**$) <u>Exercice 26</u>

Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $f\left(\complement_E A\right) = \complement_F\big(f(A)\big)$.

($**$) <u>Exercice 27</u>

Soient A et B deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de A vers B si et seulement si il existe une bijection entre A un sous-ensemble de B.

(∗ ∗ ∗) Exercice 28 **(Théorème de Cantor-Bernstein)**

Le but de cet exercice est de démontrer un célèbre théorème de Cantor et Bernstein : si E et F sont des ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F. On se donne donc deux ensembles E et F et deux applications injectives $i : E \to F$ et $j : F \to E$. On note par ailleurs

$$A_0 = E \setminus j(F),\ A_1 = (j \circ i)(A_0), \dots, A_{n+1} = (j \circ i)(A_n)$$

et

$$B = \bigcup_{n \geq 0} A_n,\ C = E \setminus B\ .$$

1. Construction de l'application.
   - (a) Démontrer que pour tout $x \in C$, il existe un unique $z \in F$ tel que $x = j(z)$. On notera cet élément $\phi(x)$.
   - (b) Pour $x \in B$, on note $\phi(x) = i(x)$. Démontrer que l'on a ainsi bien défini une application $\phi : E \to F$.
2. Injectivité de ϕ.
   - (a) Démontrer que les restrictions de ϕ à B et à C sont injectives. Considérons maintenant $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$.
   - (b) Démontrer que $x = (j \circ i)(y)$.
   - (c) En déduire que ϕ est injective.
3. Surjectivité de ϕ. Démontrer que ϕ est surjective.
4. Un exemple. Pour $E = \mathbb{N}$, $F = \{2, 3, \dots, \}$, soient

$$i : E \to F,\ n \mapsto n + 4$$

   et

$$j : F \to E, n \mapsto n\ .$$

   Déterminer les ensembles A_n, B, C et l'application ϕ.

(∗∗) Exercice 29

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \to X$ et tout $h : Z \to X$, on a

$$(f \circ g = f \circ h) \ \Rightarrow\ (g = h)$$

2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a

$$(g \circ f = h \circ f) \ \Rightarrow\ (g = h)$$

(∗∗) Exercice 30

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$f(p, q) = p + \frac{(p + q)(p + q + 1)}{2}$$

1. Calculer $1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{k=n} k$ pour tout entier naturel n. En déduire que f est injective.
2. Vérifier que $f(p + 1, q - 1) = f(p, q) + 1$ et $f(0, p + 1) = f(p, 0) + 1$ pour tous $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En déduire que f est surjective en utilisant un raisonnement par récurrence.
3. Explicitez l'application réciproque de f.