

$$6.2.2.3. \quad (E) \quad y'' + y' - 2y = e^{-x} \cos(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

① L'équation admet pour équation homogène:

$$(E_H) \quad y'' + y' - 2y = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit alors:

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9 > 0$$

Donc l'équation admet 2 solutions:

$$r_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = 1$$

$$r_2 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = -2$$

Donc les solutions de  $(E_H)$  sont de la forme:

$$y = \lambda e^x + \mu e^{-2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

## ② Solution particulière :

On utilise la méthode de variation des constantes:

$$\text{On pose } y_0 = h_1 e^x + h_2 e^{-2x}$$

où  $h_1, h_2$  sont des fonctions telles que:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} h_1' \\ h_2' \end{cases} \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix} + \begin{cases} h_2' \\ h_2' \end{cases} \begin{bmatrix} e^{-2x} \\ -2e^{-2x} \end{bmatrix} = 0 \\ (2) \quad & \begin{bmatrix} h_1' \\ h_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2' \\ h_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2x} \\ -2e^{-2x} \end{bmatrix} = \frac{\cos(x)}{e^x} \end{aligned}$$

fonctions solutions dans l'équation homogène puis leur dérivée sur la deuxième ligne.

second membre

Sous ces conditions  $y_0$  vérifie  $(E)$

or  $(1) - (2)$  nous donne:

$$-3 h_2' e^{-2x} = -\cos(x) e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow h_2' = \frac{e^x \cos(x)}{3}$$

$$\text{Donc } h_2(x) = \int \frac{e^x \cos(x)}{3} dx$$

primitive à calculer

$$\Rightarrow h_2(x) = \frac{e^{-x}}{6} (\sin(x) + \cos(x))$$

Demandez moi  
si vous n'arrivez pas

Donc (1) devient:

$$h_1' e^x + \frac{e^{-x}}{3} \cos(x) = 0$$

$$\text{D'où } h_1'(x) = -\frac{e^{-2x}}{3} \cos(x)$$

$$\Rightarrow h_1(x) = -\int \frac{e^{-2x}}{3} \cos(x)$$

primitive à calculer

$$\Rightarrow h_1(x) = \frac{e^{-2x}}{15} (-\sin(x) + 2\cos(x))$$

On trouve donc la solution particulière

$y_0$ :

$$y_0 = \frac{e^{-x}}{30} (-2\sin(x) + 4\cos(x) + 5\sin(x) + 5\cos(x))$$

$$y_0 = \frac{e^{-x}}{10} (\sin(x) + 3\cos(x))$$

③ Conclusion:

les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme:

$$y(x) = y_0(x) + y_H(x)$$

Avec les conditions initiales

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$$

On a:

$$1 = y(0) = y_0(0) + y_H(0) \\ = \frac{3}{10} + \lambda + \mu$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \mu = \frac{7}{10}$$

$$\text{et } 0 = y'(0) = y_0'(0) + y_H'(0) \\ = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \lambda - 2\mu$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 2\mu = \frac{2}{10}$$

$$\text{D'où } \lambda = \frac{16}{30} \text{ et } \mu = \frac{5}{30}$$

$$6.2.4.1. \quad (E) \quad y'' - 2y' - 3y = 2x.$$

① L'équation admet pour équation homogène:

$$(E_H) \quad y'' - 2y' - 3y = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit alors:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 16 > 0$$

Donc l'équation admet 2 solutions:

$$r_1 = \frac{2+4}{2 \times 1} = 3 \quad r_2 = \frac{2-4}{2 \times 1} = -1$$

Donc les solutions de  $(E_H)$  sont de la forme:

$$y = \lambda \left( e^{3x} \right) + \mu \left( e^{-x} \right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

② Solution particulière:

On utilise la méthode de variation des constantes:

$$\text{On pose } y_0 = h_1 e^{3x} + h_2 e^{-x}$$

où  $h_1, h_2$  sont des fonctions telles que:

$$\begin{aligned} (1) & \quad \begin{cases} h_1' \\ h_2' \end{cases} \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 3e^{3x} \end{bmatrix} + \begin{cases} h_2' \\ h_2' \end{cases} \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix} = 0 \\ (2) & \quad \begin{cases} h_1' \\ h_2' \end{cases} \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 3e^{3x} \end{bmatrix} + \begin{cases} h_2' \\ h_2' \end{cases} \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix} = 2x \end{aligned}$$

fonctions solutions dans l'équation homogène puis leur dérivée sur la deuxième ligne. second membre

Sous ces conditions  $y_0$  vérifie  $(E)$

or  $(1) + (2)$  nous donne:

$$4h_1' e^{3x} = 2x$$

$$\Leftrightarrow h_1' = \frac{1}{2} x e^{-3x}$$

$$\text{Donc } h_1(x) = \frac{1}{2} \int e^{-3x} x \, dx$$

$$\begin{array}{l} \text{IPP} \\ \uparrow \\ \Rightarrow \end{array} \quad h_1(x) = -\frac{1}{18} e^{-3x} (3x+1)$$

Donc (1) devient:

$$\frac{1}{2}x + h_2' e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow h_2'(x) = -\frac{1}{2}x e^x$$

$$\Rightarrow h_2(x) = -\frac{1}{2} e^x (x-1)$$

↓  
IPP

$$\text{D'où } y_0(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{9}$$

③ Conclusion:

des solutions de l'équation  
différentielle (E) sont de la forme :

$$y(x) = y_0(x) + y_H(x)$$