Université de Lorraine – UFR MIM
Master 1 de mathématiques
Statistique et Probabilités

Année universitaire 2020-2021
Département de Mathématiques de Metz
Simon Roby et Tilmann Wurzbacher

Devoir maison 2, à rendre avant le 18 décembre 2020 à 24h00 sur Arche

Exercice 1 : **Espérance conditionnelle via le théorème de Radon-Nikodým**

(a) Donner l'énoncé du Théorème de Radon-Nikodým.

(b) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

(i) Soit $Y \geq 0$ une variable aléatoire P-intégrable. Montrer que

$$Q(C) := \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_C \cdot Y\big] \ , \ \forall C \in \mathcal{G}$$

définit une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

(ii) Montrer que $Q << P|_{\mathcal{G}}$. Déduire du Théorème de Radon-Nikodým l'existence d'une densité $\widetilde{Y}$ telle que $Q = \widetilde{Y} \cdot P|_{\mathcal{G}}$. Ensuite, montrer que $\widetilde{Y}$ est une espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{G}$.

(iii) Conclure pour Y variable aléatoire réelle P-intégrable.

Exercice 2 : **Factorisation - cas discret**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, respectivement $Y : \Omega \to (\mathcal{Y}, 2^{\mathcal{Y}})$, des variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \mathfrak{X} = \{x_i \mid i \in I\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_j \mid j \in J\}$, où I et J sont dénombrables. Posons enfin pour $i \in I$ et $j \in J$, $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_i)$, $p_{i+} = \sum_{j \in J} p_{ij}$ et $p_{+j} = \sum_{i \in I} p_{ij}$.

(a) Montrez que $P(X = x_i) = p_{i+}$ pour tout $i \in I$ et que $P(Y = y_j) = p_{+j}$ pour tout $j \in J$.

(b) Soit $j \in J$ et $p_{+j} > 0$. Posons $a_j(i) = \frac{p_{ij}}{p_{+j}}$ et

$$Q_j = \sum_{i \in I} a_j(i)\delta_{x_i} \text{ pour } i \in I \text{ et } j \in J\,.$$

Montrer que Q_j est une probabilité sur $(\mathfrak{X}, 2^{\mathfrak{X}})$ (et sur $\mathbb{R}$).

(c) Supposons $p_{+j} > 0$, pour tout $j \in J$. Posons

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y_j & \longmapsto & \sum_{i \in I} x_i \cdot a_j(i)\,. \end{array}$$

Montrer que $\mathbb{E}\big[X|Y\big] = g \circ Y$.

Exercice 3 : **Exo classique**

Soit (X, Y) une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, absolument continue de densité $f_{(X,Y)}$ définie par :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 4y\ e^{-x-y} \cdot \mathbb{1}_\Delta(x, y)\ .$$

Ici $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < v < u\}$.

(a) Calculer, pour $a \neq 0$, une primitive de la fonction $x \mapsto x \cdot \exp(ax)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y.

(c) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

(d) Calculer la probabilité de l'évènement $\{Y \leq 0\}$.

(e) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, c-à-d la densité de X conditionnelle à $\{Y = y\}$, notée $f_{X|Y}(x|y)$.

(f) Calculer $\mathbb{E}\big[X|Y = y\big]$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$.

(g) En déduire $\mathbb{E}\big[X|Y\big]$.

Exercice 4 : **Quelle direction ?**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}_0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose aussi que, pour tout entier $n > 0$, sachant $X = n$ la variable aléatoire Y suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, où $p > 0$. Si $X = 0$, on a $Y = 0$.

(a) Donner la loi conjointe du couple aléatoire (X, Y).

(b) Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

(c) Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X = n \mid Y = k) = e^{-(1-p)\lambda} \, \frac{\big((1-p)\lambda\big)^{n-k}}{(n-k)!} \quad .$$

En déduire que $\mathbb{E}\big[X|Y\big] = Y + \lambda(1-p)$.

(d) À un embranchement routier, le nombre X de véhicules arrivant en une heure suit un loi de Poisson de paramètre 100. Les véhicules ont alors le choix entre deux directions A et B : chaque conducteur choisit la direction A avec la probabilité $1/3$ et leurs choix sont indépendants. Sachant qu'en une heure, on sait que 100 voitures ont pris la direction A, quel est le nombre de voitures qui sont passées par l'embranchement pendant cette heure ?

Exercice 5 : **Conditionnement au cas gaussien**

Soit $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré et de variance

$$\mathbb{V}(X) = K_X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Quelles sont les lois marginales de X, c-à-d les lois des composantes X_k de X pour $k = 1, 2, 3$?

(b) Certaines composantes de X sont elles indépendantes deux à deux ? Si oui, lesquelles ? Certaines composantes de X sont elles orthogonales deux à deux ? Si oui lesquelles ?

(c) Quelle est la loi de (X_1, X_2) ?

(d) Sans calculer, déterminer $\mathbb{E}\big[X_2|X_3\big]$ et $\mathbb{E}\big[(X_2 - \mathbb{E}\big[X_2|X_3\big])^2\big]$.

(e) Calculer $\mathbb{E}\big[X_1|X_3\big]$ et $\mathbb{E}\big[(X_1 - \mathbb{E}\big[X_1|X_3\big])^2\big]$.

(f) Calculer $\mathbb{E}\big[X_1|(X_2, X_3)\big]$ et $\mathbb{E}\big[(X_1 - \mathbb{E}\big[X_1|(X_2, X_3)\big])^2\big]$.

(g) Quelle est la loi de X_1 sachant $(X_2 = x_2, X_3 = x_3)$?