Université de Lorraine – UFR MIM
Master 1 de mathématiques
Statistique et Probabilités

Année universitaire 2020-2021
Département de Mathématiques de Metz
Simon Roby et Tilmann Wurzbacher

Examen

Exercice 1 : **Conditionnement au cas gaussien**

Soit $X = {}^t(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur gaussien d'espérance $\mathbb{E}[X] = {}^t(1, 0, 2, -1)$ de variance

$$\mathbb{V}(X) = K_X = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*a*) Démontrer que X est un vecteur gaussien non-dégénéré.

(*b*) Quelles sont les lois marginales de X, c-à-d les lois des composantes X_k de X pour $k = 1, 2, 3, 4$? Expliquez comment vous les obtenez.

(*c*) Démontrer que X_2 et (X_3, X_4) sont indépendantes.

(*d*) Quelle est la loi de $(X_1 + 2X_2, X_3 + X_4)$? Que peut on en déduire ? (Peut etre qu'il faut poser cette question autrement)

(*e*) Sans calculer, déterminer $\mathbb{E}[X_2|(X_3, X_4)]$ et $\mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2|(X_3, X_4)])^2]$.

(*f*) Calculer $\mathbb{E}[(X_1, X_1 + X_2)|(X_3, X_4)]$. Comment expliquer ce résultat ?

Exercice 2 : **Indépendance conditionnelle**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace mesuré. On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions ϕ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[\psi(Y)|\mathcal{G}]$$

(*a*) Supposons que $\mathcal{G} = \{0, \Omega\}$. Que veut alors dire que X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$?

(*b*) Montrez que $\mathbb{E}[\psi(Y)|\sigma(\mathcal{G}, X)] = \mathbb{E}[\psi(Y)|\mathcal{G}]$.