Université de Lorraine- Metz
Master 1 de mathématiques

Année universitaire 2020-2021

TD 11 : Espérances conditionnelles

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ et $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. On note la probabilité conditionnelle sachant B par $\mathbb{P}_B$. On rappelle que :

$$\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0,1] \ , \ \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \, .$$

(a) Montrer que

$$\int_\Omega X \mathsf{d}\mathbb{P}_B = \frac{\mathbb{E}\big[X \cdot \mathbb{1}_B\big]}{\mathbb{P}(B)} \ .$$

On notera cette valeur $\mathbb{E}\big[X|B\big]$ l'espérance sachant B de X.

(b) Supposons que $0 < P(B) < 1$. On peut alors poser $\mathcal{G} := \{B, \ B^c, \Omega, \emptyset\}$ et

$$\widetilde{\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]} := \mathbb{E}\big[X|B\big] \cdot \mathbb{1}_B + \mathbb{E}\big[X|B^c\big] \cdot \mathbb{1}_{B^c} \, .$$

Montrer alors que:

(i) $\widetilde{\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]}$ est une application $\mathcal{G}$-mesurable.

(ii) $\forall C \in \mathcal{G}$,

$$\int_C \widetilde{\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]} \mathsf{d}\mathbb{P} = \int_C X \mathsf{d}\mathbb{P} \, .$$

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on pose des ensembles $B_1, \ldots, B_n$, deux à† deux disjoints tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(B_i) > 0$ et

$$\bigsqcup_{i=1,\ldots,N} B_i \ = \ \Omega \ .$$

On pose $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par $\{B_1, \ldots, B_N\}$. Soient finalement, $A \in \mathcal{F}$ et $X = \mathbb{1}_A$. Montrer que

$$Z := \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(B_i)} \cdot \mathbb{1}_{B_i}$$

est une espérance conditionnelle de X par rapport à† $\mathcal{G}$.

Exercice 3

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Posons $\mathbb{F}:=\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})=\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $\mathbb{G}:=\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}|_{\mathcal{G}})$.

(a) Montrer que l'application

$$j:\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ [Z]_{\mathbb{G}} & \longmapsto & [Z]_{\mathbb{F}} \end{array}$$

est bien définie et est une injection isométrique linéaire. En déduire que $j(\mathbb{G})$ est fermé dans $\mathbb{F}$. Par la suite on identifiera $\mathbb{G}$ et $j(\mathbb{G})$.

(b) Soient $\Pi:\mathbb{F}\to\mathbb{G}$ la projection orthogonale et $X,Y\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})$ avec $X\leq Y$ $\mathbb{P}$-p.s., ainsi que V,W les représentants respectifs de $\Pi(X),\Pi(Y)$ dans $\mathbb{G}$. Montrer que $V\leq W,\ P|_{\mathcal{G}}$-p.s.

Exercice 4

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ et $X,Y\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})$, Montrer que:

(a) $\mathbb{E}\big[X|\mathcal{F}\big]=X$,

(b) $\mathbb{E}\big[X|\{\emptyset,\Omega\}\big]=\mathbb{E}\big[X\big]$,

(c) $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]\big]=\mathbb{E}\big[X\big]$,

(d) $\mathbb{E}\big[aX+bY|\mathcal{G}\big]=a\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]+b\mathbb{E}\big[Y|\mathcal{G}\big]$,

(e) si $X\leq Y$, alors $\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]\leq\mathbb{E}\big[Y|\mathcal{G}\big]$, autrement dit, $\mathbb{E}\big[\,\cdot\,|\mathcal{G}\big]$ est monotone croissante.

Exercice 5

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une suite dans $\mathcal{F}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que pour tout $i\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_i)>0$ et

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \ = \ \Omega\ .$$

On pose $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par $\{B_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

(a) Soit $\tilde{B}_N:=\bigcup_{i=1}^{N}B_i$, pour $N\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\sigma\big(\{B_i\mid i\in\mathbb{N}\}\big)=\sigma\big(\{\tilde{B}_N\mid N\in\mathbb{N}\}\big)\ .$$

(b) Montrer que $\forall A\in\mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G})=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{1}_{B_i}\ .$$

(c) Montrer que si $X\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{\mathbb{E}\big[X\cdot\mathbb{1}_{B_i}\big]}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbb{1}_{B_i}$$

Exercice 6
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ et $(\Sigma, \mathcal{S})$ un espace mesurable discret (i.e. Σ dénombrable). On considère enfin une fonction mesurable $Y : \Omega \to \Sigma$. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[X|Y=\sigma\big] = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}\left[X\cdot \mathbb{1}_{\{\sigma\}}(Y)\right]}{\mathbb{P}(Y=\sigma)} & \text{si } \mathbb{P}(Y=\sigma) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que $\mathbb{E}\big[X|Y=\sigma\big] = \mathbb{E}\big[X|\{Y=\sigma\}\big]$ si $\mathbb{P}(Y=\sigma) > 0$.

Exercice 7
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $n \in \mathbb{N}$ et G un groupe d'ordre n de bijections mesurables de Ω qui préserves $\mathbb{P}$, c'est à dire $g_*(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$, $\forall g \in G$.

(*a*) Soit

$$\mathcal{F}^G := \{B \in \mathcal{F} \mid g(B) = B \ , \ \forall g \in G\} .$$

Montrer que $\mathcal{F}^G$ est une sous-tribu. On l'appelle la sous-tribu de $\mathcal{F}$ invariante par G.

(*b*) Soit $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[X|\mathcal{F}^G\big] = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} X \circ g \ .$$

(*c*) On suppose à présent que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,\sigma^2)\big)$ pour $\sigma > 0$ et $G = \{\mathsf{Id}_{\mathbb{R}}, \tau\}$, où τ est définie par $\tau(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}),\ \mathbb{E}\big[X|\mathcal{F}^G\big] = \frac{1}{2}(X + X') \ , \text{ où } X'(x) = X(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8
On pose $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \big([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda^1|_{[0,1]}\big)$ et

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} \mid B \text{ ou } B^c \text{ dénombrable}\} .$$

Déterminez $\mathbb{E}\big[\,\mathrm{id}_{[0,1]} \mid \mathcal{G}\big]$.

Exercice 9
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendentes identiquement distribuées et intégrables. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[X|X+Y\big] = \mathbb{E}\big[Y|X+Y\big] = \frac{1}{2}(X+Y) \ .$$

Exercice 10
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(*a*) Soient X, Y des variables aléatoires réelles et $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. Montrer que si $\mathbb{E}\big[Y|X\big] = X$ et $\mathbb{E}\big[Y^2|X\big] = X^2$, alors $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s.

(*b*) Soient X, Y des variables aléatoires réelles et $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Est ce que $\mathbb{E}\big[Y|X\big] = X$ implique que $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s.?

Exercice 11 : **Factorisation - Cas absolument continu**
Soit (X,Y) un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La loi de (X,Y) est absolument continue de densité $f_{(X,Y)}$ sur $\mathbb{R}_2$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ telle que $f_Y(y) > 0$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_{X|Y}(x|y) \end{array}$$

est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ telle que $f_Y(y) > 0$. Montrer que, si X et Y sont indépendants,

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \ , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(c) Supposons que X soit $\mathbb{P}$-intégrable et posons pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y)dx$$

Montrer que $\mathbb{E}\big[X|Y\big] = g \circ Y$

Exercice 12

(a) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour toute application borélienne bornée g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\big[g(Y)|X\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)\big] \ p.s.$$

(b) Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction $f_{(X,Y)}$ définie par :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_{(0<x<y)} \ .$$

Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. En déduire que les variables aléatoires X et $Y - X$ sont indépendantes.

TD 12 : Espérance conditionelle et quelques compléments

Exercice 1

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La loi de (X, Y) est absolument continue de densité $f_{(X,Y)}$ sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ telle que $f_Y(y) > 0$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_{X|Y}(x|y) \end{array}$$

est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ telle que $f_Y(y) > 0$. Montrer que, si X et Y sont indépendants,

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Supposons que X soit P-intégrable et posons pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

Montrer que $\mathbb{E}\big[X|Y\big] = g \circ Y$.

Exercice 2

(a) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour toute application borélienne bornée g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\big[g(Y)|X\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)\big] \ p.s.$$

(b) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction $f_{(X,Y)}$ définie par :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{\Delta}(x, y)\ .$$

Ici $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < u < v\}$.

(i) Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

(ii) En déduire que les variables aléatoires X et $Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 3

On considère un vecteur gaussien bidimensionnel ${}^t(X, Y)$ de moyenne $m = {}^t(1, -1)$ et de matrice de covariance :

$$K = \operatorname{var}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Écrire la densité du vecteur gaussien ${}^t(X, Y)$.

(b) Calculer les lois des v.a.r. suivantes : X, Y et $X + Y$.

(c) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\big[X|Y\big]$ et sa loi.

Exercice 4

Soient X resp. Y des vecteurs aléatoires de dimension m resp. n. Définissons la “matrice de covariance de X et Y” comme la matrice réelle de format $m \times n$ suivante :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot {}^t(Y - \mathbb{E}[Y])] .$$

(a) Montrer que $\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X)$.
(b) Montrer que $\mathrm{cov}(Y,X) = {}^t(\mathrm{cov}(X,Y))$.
(c) Montrer que pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ on a $\mathrm{cov}(X,Y)_{i,j} = \mathrm{cov}(X_i,Y_j)$.
(d) Montrer que $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot {}^tY] = \mathbb{E}[X \cdot {}^t(Y - \mathbb{E}[Y])]$.
(e) Montrer que

$$\mathrm{var}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix} .$$

Exercice 5

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. P-intégrable et $B \in \mathcal{F}$ t.q. $P(B) > 0$. Montrer que X est P_B-intégrable.

Exercice 6

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. P-intégrable et $X \geq 0$ P-p.s. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \min(X, n)$. Montrer que

(a) $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ pour tout n
(b) X_n est essentiellement bornée pour tout n, i.e. $X_n \in \mathcal{L}^\infty$
(c) $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2$ sur un espace probabilisé
(d) $X_n \uparrow X$
(e) $\int_\Omega X_n \, dP \to \int_\Omega X \, dP$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 7

Soient $(\mathfrak{X}, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ mesurable t.q. $f \geq 0$ μ-p.p. Soit $\int_{\mathfrak{X}} f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ-p.p.

Université de Lorraine- Metz — Année universitaire 2020-2021
Master 1 de mathématiques

TD 13 : Chaines de Markov et révisions

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1, 2, 3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

(a) Donner le graphe de transition (orienté et pondéré) associé à la matrice de transition P.
(b) Déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice inversible M de taille 3×3 telle que

$$P = M\Delta M^{-1} .$$

(c) Déterminer les états récurrents et les états transitoires de la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
(d) Soit R l'ensemble des états récurrents de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Calculer $\mathbb{P}(T_R < +\infty)$, où $T_R = \inf\{n \geq 1 \mid X_n \in R\}$.
(e) Déterminer, si elle existe, une mesure invariante pour la matrice P.

Exercice 2

L'urne d'Ehrenfest est un modèle de diffusion à travers une membrane poreuse. Dans ce modèle, on considère un caisson composé de deux compartiments A et B. Le caisson contient N particules qui se répartissent entre A et B. À l'instant n, une particule, choisie uniformément au hasard, change de compartiment. Soit X_n le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n.

(a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in N_0}$ est une chaîne de Markov.
(b) Donner sa matrice de transition et son graphe.
(c) Calculer sa loi invariante.

Exercice 3 (P. Florchinger)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une chaîne de Markov à espace d'état E. Soit F un sous ensemble de E. On note

$$\tau = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in F\}$$

le temps d'entrée dans l'ensemble F.
Démontrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ par $Y_n = X_{n\wedge\tau}$ est une chaine de Markov dont on déterminera la matrice de transition.

Exercice 4 (P. Florchinger)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une espace probabilisé et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, définies sur cet espace , de loi de probabilité

$$P_{U_0} = p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$$

où $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la suite de variables aléatoires réelles, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ par

$$X_{n+1} = X_n \cdot U_n$$

où X_0 est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante des variables aléatoires U_n, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une chaîne de Markov homogène dont on déterminera la matrice de transition P.
(b) Déterminer les états récurrents et transitoires de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
(c) Déterminer la probabilité de l'événement $(X_n = X_0)$.
(d) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = X_0)$.
(e) Déterminer, si elle existe, la probablité invariante π de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Exercice 5 (P. Florchinger)
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que :

- $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
- la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi normale $\mathcal{N}(ay + b, \sigma^2)$, où a et b sont deux réels fixés.

(a) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\big[e^{itX}|Y\big]$.
(b) En déduire, la fonction caractéristique de la variable aléatoire X ainsi que sa loi de probabilité.
(c) Soit $\phi_{(X,Y)}$ la fonction caractéristique et la loi de probabilité du vecteur aléatoire ${}^t(X, Y)$.
(d) A quelle condition les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6
Soit $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$K_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et d'espérance $\mathbb{E}[X] = {}^t(1, 1, 0)$.

(a) Montrez que $X_2 - X_3 = 1$ p.s.
(b) Donnez la loi de $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ si oui, l'expliciter.

(3) Quel est le support dans $\mathbb{R}^3$ de la loi de X ?

Exercice 7
Soit (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $\mathbb{E}\big[X|Y - X\big]$.
(b) En déduire la loi de $\mathbb{E}\big[X|Y - X\big]$.

Exercice 8 (TD8 : Ex2)

Une entreprise chimique commercialise un polymère servant à la fabrication de microprocesseurs et stocké dans une cuve dont la caractéristique à contrôler est la viscosité. Pour pouvoir commercialiser le polymère, la viscosité doit être comprise entre 75 et 95. Quatre extractions ont été réalisées dans des zones différentes de la cuve et ont donné

$$78 \ 85 \ 91 \ 76 \ .$$

On suppose que la viscosité suit une loi normale.

(a) Donner des estimations ponctuelles de la moyenne et de l'écart-type de la viscosit é.

(b) Donner un intervalle de confiance pour la moyenne avec un risque de 5% en supposant que l' écart-type vaut $\sigma = 5$.

(c) Dans cette question, l'écart-type n'est plus connu. Donner un intervalle de confiance pour la moyenne avec un risque de 5%.

(d) Donner un intervalle de confiance pour la variance avec un risque de 5%.

Exercice 9 (TD9 : Ex7)

On considère, dans ce problème, une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta} \exp\left(\frac{-x^2}{\theta}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x), \text{ où } \theta > 0.$$

(a) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ, soit $\hat{\theta}$.

(b) On considère le test $H0 : \theta = \theta_0$ contre $H1 : \theta = \theta_1$ dans lequel $\theta_1 > \theta_0$. En utilisant le lemme de Neyman-Pearson, montrer que le test UPP (uniform ément le plus puissant) pour ce problème s'exprime en fonction de θ. En expliciter la forme de la région critique.

(c) (i) Montrer que la variable $U = \frac{2n\hat{\theta}}{\theta}$ suit la loi du χ^2 à $2n$ degrés de libert é.

(ii) En déduire la région critique du test considéré.

(iii) On suppose que $\alpha = 0,05$, $\theta_0 = 4$, $\theta_1 = 5$ et $n = 15$. Définir la r égion critique correspondante et évaluer la puissance du test qui en résulte.

(d) Supposant n grand et admettant la validité du théorème de la limite centrée, expliciter numériquement

(i) la région critique

(ii) la puissance du test

(iii) la taille minimale de l'échantillon à considérer pour obtenir une puissance au moins égale à $1 - \beta$

(iv) Traiter les questions ci-dessus avec $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,1$, $n = 30$, $\theta_0 = 4$ et $\theta_1 = 5$.

Exercice 10 (TD10 : Ex5)

On observe 200 familles de 3 enfants et l'on compte le nombre de filles de chaque famille. On trouve les résultats suivants :

Nombre de filles	0	1	2	3
Nombres de familles	20	83	70	27

On veut savoir si d'après ces résultats, on peut considérer que la naissance d'une fille et la naissance d'un garcon sont des événements équiprobables, c'est-à-dire si la loi de la variable X donnant le nombre de filles dans une famille de trois enfants est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Faire un test au risque de $\alpha = 0,05$ pour répondre à cette question.