Sujets MATh.en.JEANS 2022-2023

Lycées F. Arago, A. Maillol (Perpignan, France) et lycée français C. De Gaulle (Pékin, Chine)

proposés par Robert Brouzet[1] et Simon Roby[2].

Ok, $7 = \sqrt{49} - \sqrt{0}$, $-\sqrt{3} = \sqrt{0} - \sqrt{3}$, Mais comment écrire $\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{7}$? Est ce seulement possible ? et π ?

Sujet 1 Ne pas oublier ses racines !
Est-ce que tous les nombres réels peuvent s'écrire sous la forme d'une différence de deux racines carrées $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ avec n et m entiers ? Si ce n'est pas le cas, peuvent-ils du moins être approchés arbitrairement près par de telles différences de racines ?

Sujet 2 La formule-à-Toto → La règle usuelle de dérivation est $(fg)' = f'g + fg'$
La formule de dérivation d'un produit de fonctions n'a pas le bon goût d'être comme on le voudrait et certainement que ce sont quelques profs de maths grincheux qui l'ont compliqué à loisir pour embêter les élèves ! Quoi qu'il en soit l'élève Toto décide que $(fg)' = f'g'$. Pourriez-vous donner beaucoup de fonctions pour lesquelles Toto obtiendrait néanmoins avec sa formule un résultat correct ?

mais que se passe t'il si on lui préfère celle de Toto?

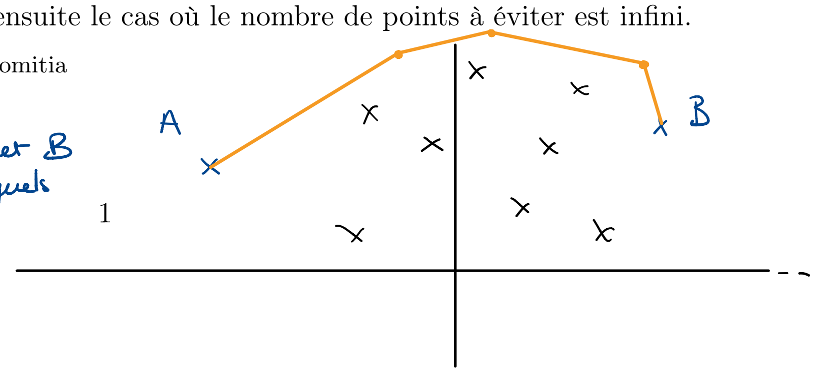
Sujet 3 Le grand fossé → Le début de la liste infini des nombres premiers est 2 3 5 7 11 13 17 19 23
Comme l'aurait dit Monsieur de Lapalisse, entre deux nombres premiers consécutifs il n'y en a point d'autres ! Ces autres, qui ne sont pas premiers, sont dits *composés*. Si l'on observe la longueur des trous que forment les nombres composés entre deux nombres premiers dans la liste des nombres de 1 à 100 on constate qu'ils ne sont pas très gros. Cependant, que peut-on en dire en général : ont-ils une longueur maximale ou bien peuvent-ils être aussi longs que l'on veut ?
Dans le même ordre d'idée, on s'intéresse maintenant aux nombres composés qui sont divisibles par un carré parfait strictement supérieur à 1, par exemple 25 ou 44. On peut là encore regarder la longueur des listes formées de tels entiers consécutifs et se poser la même question que précédemment.

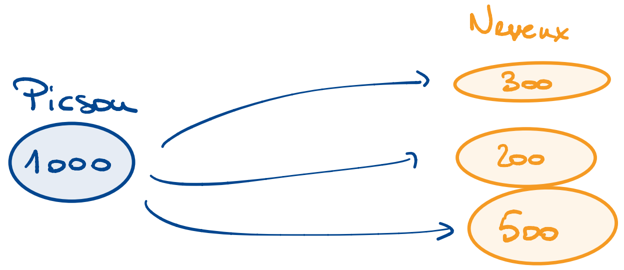
Comment savoir l'évolution des écarts entre les nombres premiers ?

Sujet 4 Tous les chemins mènent à Rome
Étant donnés deux points A et B du plan on peut trouver une route rectiligne les reliant (le segment $[A, B]$). Si maintenant on s'interdit de passer par certains points du plan, on ne pourra peut-être pas relier A et B en allant tout droit mais on pourra quand même relier A et B par une ligne polygonale. C'est vrai en tout cas si le nombre de points à éviter est fini. En revanche si le nombre de points à éviter est infini cela semble nettement moins clair ! Expliquez le cas où le nombre de points à éviter est fini et essayez de donner une ligne polygonale ayant le moins de côtés possible. Examinez ensuite le cas où le nombre de points à éviter est infini.

1. LAMPS, Université de Perpigna Via Domitia
2. YMSC, Tsinghua University

Comment être sûr de relier A et B par des segments à coup sûr, quels que soient le nombre de points entre les deux ?





Combien y a-t-il de distributions différentes ?

Sujet 5 Les étrennes de Picsou
Picsou souhaite distribuer n euros entre ses k neveux. Combien de possibilités a-t-il ? (N.B. il donne à chacun un nombre entier d'euros et un neveu peut ne rien obtenir de la part de son oncle, c'est-à-dire 0 euro).

Sujet 6 Des sommes de carrés...
Une règle classique nous dit que le produit de 2 nombres entiers au carré reste un carré de nombre entier. Mais est-ce encore vrai pour la somme de 2 carrés : quand on multiplie deux sommes de 2 carrés de nombres entiers, est-ce-que cela reste une somme de 2 carrés de nombres entiers ? Si oui, de combien de manières peut-on l'écrire ? Qu'en est-il pour la somme de 3 carrés ? De 4 carrés ? etc.

On sait que $(ab)^2 = a^2 b^2$ donc le produit des carrés de 2 entiers est toujours un carré.

Qu'en est il pour la somme de carrés ?

$(7^2+5^2)(8^2+2^2) = ?^2 + ?^2$

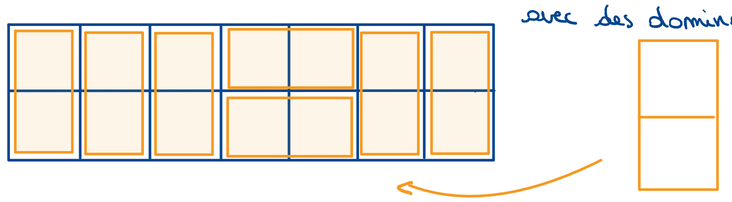
$7^2 \times 5^2 = 35^2$
$8^2 \times 2^2 = 16^2$

Comment trouver ces 2 entiers ? Existent-ils ?

Sujet 7 Damier et dominos
Pour chaque nombre entier n, nous prenons un damier de 2 lignes et n colonnes. Nous voulons savoir combien de manières nous pouvons le recouvrir de dominos de taille 2×1. Est-ce possible de le savoir pour n'importe quel nombre n ? Que pensez vous pour un damier plus grand en largeur ?

Sujet 8 Les plus grandes partitions par multiplications
Une partition d'un nombre entier n est une suite de nombre entiers non nuls tels que leur somme est égale à n. Le nombre 2 a pour partition $(1, 1)$ et (2). Le nombre 7 admet $(3, 3, 1)$ pour partition. On cherche à savoir laquelle des partitions d'un nombre n, donne le plus grand nombre par multiplication de ses nombres. Par exemple, pour 9, cette partition "maximale" est $(3, 3, 3)$. Est il possible de trouver ce résultat pour tout n ? Quand on comptabilise seulement les partitions de deux entiers ? De trois entiers ? Quand ces partitions sont composés seulement de nombres différents ?

Damier 2×6 → Combien de manière de le recouvrir avec des dominos 2×1



1 possibilité. combien d'autres ?

11 se décompose

$1+10 = 2+9 = 3+7+1 = 2+5+4 = \dots$

↳ laquelle de ces décompositions est la plus grande si on multiplie les nombres entre eux ?

$1\times 10 < 2\times 9 < 3\times 7\times 1 < 2\times 5\times 4$
10 18 21 40

laquelle est la plus grande décomposition ?