

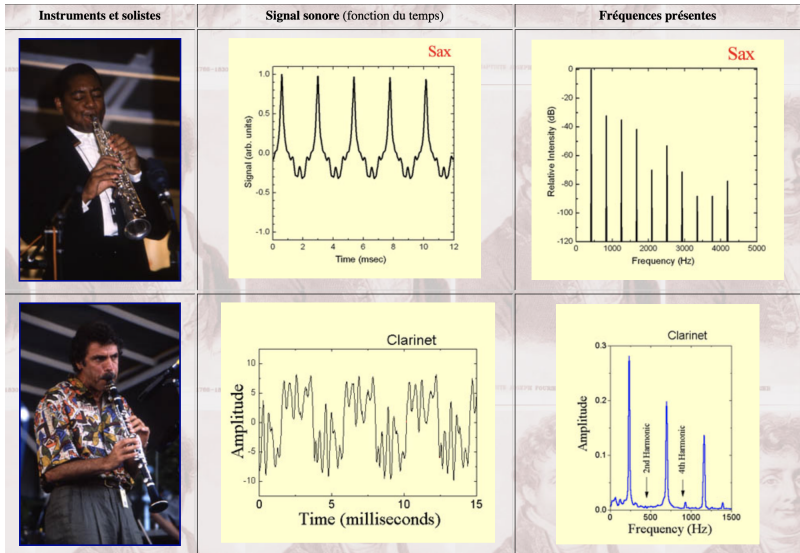
L'analyse harmonique, une généralisation des transformées de Fourier

Déconfinement du séminaire doctorants de l'IECL

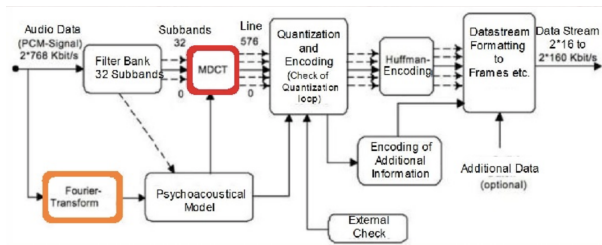
Simon Roby

02 mai 2020

Pourquoi "analyse harmonique"?



Pourquoi "analyse harmonique"?



Séries et transformées de Fourier

Théorème de Dirichlet

Pour f une fonction sur le cercle $\mathbb{S}_1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [-\pi, \pi[$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy$$

Théorème d'inversion de la transformée de Fourier

Pour f une fonction adéquate sur \mathbb{R}^n :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} f(y) dy d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} f(y) dy d\xi$$

Domaine f	Domaine \hat{f}	Fonction sphérique
S^1	\mathbb{Z}	$\varphi_n(x) = e^{inx}$
\mathbb{R}^n	\mathbb{R}^n	$\varphi_\xi(x) = e^{2\pi i x \xi}$
G	\hat{G}	φ ← ?

Comment généraliser l'analyse de Fourier à des fonctions sur un groupe quelconque? : C'est cela que l'on appelle l'analyse harmonique. La formule est elle aussi "simple" que dans ces deux premiers cas?

"Rappel"

Groupe de Lie : Structure de groupe et structure d'algèbre de Lie.

Représentation d'un groupe : Couple π, V_π tel que $\pi : G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ est un homomorphisme de groupes

Représentation unitaire : V_π est munit d'une structure d'espace de Hilbert. On a : $\pi(g)^{-1} = \pi(g)^*$

Représentation irréductible : Représentation qui n'admet aucun espace invariant par G .

Groupe Abélien (Schur, Weil, Cartan, Godement (début XXème))

Groupe dual :

$$\hat{G} = \{ \pi : G \xrightarrow{\text{hom. cont.}} \mathbb{S}^1 \}$$

pour \mathbb{R}^n , on obtient bien $\{x \mapsto e^{ix \cdot \xi} \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$
et pour \mathbb{S}^1 on a $\{n \mapsto e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\pi) = \int_G \overline{\pi(g)} f(g) dg$$

Formule d'inversion : Si $f \in L^1(G)$ et $\hat{f} \in L^1(G)$, pour presque tout $g \in G$,

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \pi(g) \hat{f}(\pi) d\pi$$

Groupe Compact (Peter, Weyl - 1927)

Groupe dual :

$$\hat{G} = \{\pi \text{ representations irréductibles unitaires de } G\}$$

Transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\pi) = \int_G \pi(g)^* f(g) dg$$

Formule d'inversion : Si $f \in L^2(G)$ et $\hat{f} \in L^2(\hat{G})$, pour tout $g \in G$,

$$f(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \text{Tr} (\pi(g) \hat{f}(\pi))$$

Groupe de type I (Mautner, Segal - Années 1950)

Groupe dual :

$$\hat{G} = \{\pi \text{ representations irréductibles unitaires de } G\}$$

Transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\pi) = \int_G \pi(g^{-1})f(g)dg$$

Formule d'inversion : Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, pour tout $g \in G$, il existe une mesure μ sur \hat{G} :

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \text{Tr} (\pi(x)\hat{f}(\pi))d\mu(\pi)$$

$SL(2, \mathbb{R})$ and real reductive group (Harish-Chandra - 1952 puis 1976)

\hat{G} se compose de deux types de représentations pour $SL(2, \mathbb{R})$:

Les représentations de la série discrète : π_n où $n \in \mathbb{Z}^*$

Les représentations de la série principale : $\pi_{\pm, i\lambda}$ où $\lambda \in [0, +\infty[$

Formule d'inversion :

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\text{Tr}(\hat{f}(\pi_{n+1})\pi_{n+1}(x)) + \text{Tr}(\hat{f}(\pi_{-n-1})\pi_{-n-1}(x)) \right) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \text{Tr}(\hat{f}(\pi_{+, i\lambda})\pi_{+, i\lambda}(x)) \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \text{Tr}(\hat{f}(\pi_{-, i\lambda})\pi_{-, i\lambda}(x)) \lambda \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \end{aligned}$$

Espace homogène $X = G/K$ (Helgason - ~ 1980)

G : groupe de Lie semisimple connexe de centre fini \searrow
 K : maximal compact \nearrow
 $X = G/K$

Décomposition Iwasawa : $G = KAN$ où A est abélien et N est nilpotent

$$g = \mathbf{k}(x) \exp(\mathbf{H}(x)) \mathbf{n}(x) \quad \text{où } \mathbf{H}(x) \in \mathfrak{a}$$

Transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\lambda, kM) = \int_G e^{-(i\lambda + \rho)(H(g^{-1}))} f(g) dg$$

où $\lambda \in \mathfrak{a}^*$

Formule d'inversion :

$$f(x) = C_G \int_{\mathfrak{a}^*} \int_{kM} \hat{f}(\lambda, kM) e^{(i\lambda - \rho)(\mathbf{H}(x^{-1}k))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda dk$$

Fibré vectoriel homogène (Camporesi - 1998)

Unique structure possible de fibré vectoriel sur $X = G/K$ invariante par l'action de G pour chaque représentation (τ, V_τ) de K .

$$E_\tau = G \times V_\tau / \sim \text{ où } (g, v) \sim (gk, \tau(k^{-1})v)$$

Sections du fibrés : $\{f : G \rightarrow V_\tau \mid f(gk) = \tau(k^{-1})f(g)\}$

Transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\lambda, k) = \int_G e^{-(i\lambda + \rho)(\mathbf{H}(x^{-1}k))} \tau(\mathbf{k}(x^{-1}k)^{-1}) f(x) dx$$

Formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{d_\tau} \sum_{P'} C_{P'} \sum_{\sigma'} \int_{\mathfrak{a}'^*} \int_K F^{i\nu' + \mu_1 - \rho}(x^{-1}k) P_{\sigma'} \hat{f}(\nu' - i\mu_1, k) p_{\sigma'}(\nu') d\nu' dk$$

Utilité