Analyse harmonique sphérique sur les fibrés homogènes

Simon Roby

Sommaire

1. Introduction à l'analyse harmonique
2. Notions fondamentales
3. Opérateurs différentiels invariants
4. Fonctions sphériques
5. Isomorphismes d'algèbre

Introduction à l'analyse harmonique

Prémisses

L'analyse harmonique est née au milieu du 18ème siècle du désir de résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

qui provient du problème de "la corde vibrante". En effet, ce problème a mené Fourier à représenter une fonction 2π- périodique arbitraire ("assez régulière") f en tant que superposition de fonctions "spéciales" trigonométriques :

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

où pour $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,.$$

Introduction à l'analyse harmonique

Généralisation

Espace	S^1	R	X
fonctions spéciales	e^{-inx}	$e^{i\lambda x}$	? ? ?
"objet dual"	Z	R	? ? ?

Le but, pour généraliser l'analyse de Fourrier, est donc d'interpréter ses "fonctions spéciales" pour donner une idée de "l'objet dual". Pour cela il y a plusieurs interprétations possibles, par exemple sur $\mathbb{R}$:

- comme décomposition spectrale par rapport à l'algèbre commutative $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}$ à coefficients constants
- comme décomposition de $L^2(\mathbb{R})$ en représentations irréductibles du groupe de Lie abélien $\mathbb{R}$

Introduction à l'analyse harmonique

Histoire

- Problème résolu :
  - Groupes topologiques abéliens localements compacts
  - Groupes de Lie compacts (1930 / Haar, Schur, Weil)
- Problème non résolu pour les groupes de Lie non compacts :
  - Cas semi-simple et réductif (Harish-Chandra, Guelfand, ...)
  - Cas résoluble
- Cas d'un espace symétrique Riemannien G/H (Helgason, Gangolli, Varadarajan, ...) puis d'un fibré vectoriel homogène

But du mémoire

Poser les bases de cette jeune théorie, afin de pouvoir l'utiliser dans des exemples (pour le calcul de résonances d'opérateurs différentiels).

Notions fondamentales

Groupe de Lie, algèbre de Lie

- Théorème de Cartan : Les sous groupes de Lie d'un groupe de Lie sont exactement ses groupes fermés.
- Étude des algèbres enveloppante et symétrique (Symétrisation)
- Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt
- Théorème de structure de G/H
- Rappels sur les représentations et les mesures de Haar

Fibré vectoriel homogène

Construction, existence et unicité

Opérateurs différentiels invariants

Isomorphisme entre les fonctions radiales à gauche et les sections

On a un isomorphisme entre $C^\infty(G,\tau)$ et $\Gamma^\infty(E_\tau)$ donné par :

$$\tilde{} : \Gamma^\infty E_\tau \to C^\infty(G,\tau)$$

définie par

$$\widetilde{u}(g) = g^{-1} \cdot u(gH)$$

pour tout $u \in \Gamma^\infty E_\tau$ et $g \in G$

ET

$$^0 : C^\infty(G,\tau) \to \Gamma^\infty E_\tau$$

définie par

$$f^0(gH) = (g, f(g))H$$

pour tout $f \in C^\infty(G,\tau)$ et $g \in G$

Opérateur différentiel invariant

Tout opérateur différentiel invariant de $C^\infty(G, V_\tau)$ dans $C^\infty(G, V_\sigma)$ peut être vu comme un élément de $\mathrm{Hom}(V_\tau, V_\sigma) \otimes U(\mathfrak{g})$.

Correspondance pour les opérateurs différentiels sur les fonctions radiales

On a une correspondance bi-univoque entre les opérateurs différentiels qui envoient $C^\infty(G,\tau)$ dans $C^\infty(G,\sigma)$ et les éléments de $\mathrm{Hom}(V_\tau, V_\sigma) \otimes U(\mathfrak{g})$ invariants par H.

On note cette espace : $\Big(\mathrm{Hom}(V_\tau, V_\sigma) \otimes U(\mathfrak{g})\Big)^H$

Opérateur différentiel invariants

On suppose à présent que l'espace G/H est réductif, c'est à dire qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m}$ soit $\mathrm{Ad}(H)$-invariant. Ceci entraîne que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ (et c'est même équivalent à cette condition quand H est connexe). On considère que $\tau = \sigma$.

Isomorphisme entre $U(\mathfrak{g})$ et $D(E_\tau)$

En supposant que la différentielle de τ est irréductible, on peut construire un morphisme d'algèbre μ, entre $U(\mathfrak{g})^H$ et $D(E_\tau)$ de noyau $U(\mathfrak{g})^H \cap U(\mathfrak{g})I$ où I est le noyau de τ.
De plus, μ_H, l'application quotient, est surjective (donc bijective) si une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) Il existe un espace J, H-invariant sous τ, dans $U(\mathfrak{h})$ tel que $U(\mathfrak{h}) = I \oplus J$.

(ii) La représentation adjointe de H sur $\mathfrak{h}$ est semisimple.

(iii) $\mathrm{Ad}(H)$ est compact.

Fonctions sphériques

K sous groupe compact de G

Fonctions radiales

- Définition : $F : G \to \mathrm{End}(V_\tau)$ telle que, pour tout $g \in G$ et $k_1, k_2 \in K$: $F(k_1 g k_2) = \tau(k_2^{-1}) F(g) \tau(k_1^{-1})$
- Fonctions uniquement déterminée par leur trace.

Fonctions τ-sphériques

$\phi \in C_c(G, K, \tau, \tau)$ est dite $\underline{\tau\text{-sphérique}}$ sur G si elle est non nulle et si l'application

$$\chi_\phi : F \mapsto \frac{1}{\dim \tau} \int_G \mathrm{Tr}\left[\phi(x^{-1}) F(x)\right] dx$$

définit un caractère de $C_c(G, K, \tau, \tau)$.

Fonctions sphériques

Caractérisation de fonctions sphériques

Soit $\phi \in C_c(G, K, \tau, \tau)$ telle que $\phi(e) = \mathrm{Id}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(*i*) ϕ est τ-sphérique

(*ii*) Pour tout $x, y \in G$, ϕ vérifie une des trois équations fonctionnelles suivantes :

$$\int_K \tau(k)\phi(xky)dk = \frac{\mathrm{Tr}\,\phi(y)}{\dim \tau}\phi(x) \qquad (*)$$

$$\int_K \phi(xky)\tau(k)dk = \frac{\mathrm{Tr}\,\phi(x)}{\dim \tau}\phi(y) \qquad (**)$$

$$\int_K \mathrm{Tr}\left[\tau(k)\phi(xky)\right]dk = \frac{\mathrm{Tr}\,\phi(y) \times \mathrm{Tr}\,\phi(y)}{\dim \tau} \qquad (***)$$

(*iii*) ϕ est une fonction propre pour la convolution sur $C_c(G, K, \tau, \tau)$.

Isomorphismes d'algèbres

- la fonction $e_i : K \to C$ telle que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $k \in K$,

$$e_i(k) := d_\tau \tau_{ii}(k^{-1})$$

- la fonction $\chi : K \to C$ telle que pour tout $k \in K$,

$$\chi(k) := d_\tau \operatorname{Tr} \tau(k^{-1}) = \sum_{i=1}^{d} e_i(k)$$

- L'algèbre $C_c(G, K, \tau, \tau)$ des fonctions continues à support compact de G dans $\mathrm{End}(V_\tau)$ qui sont τ-radiales. L'involution est donnée par $f^*(x) = \big(f(x^{-1})\big)^*$ où l'étoile dans le membre de droite est l'endomorphisme adjoint.
- L'algèbre $C^0_{c,\chi}(G)$ des fonctions continues à support compact de G dans C K-centrales telles que $\chi * f * \chi = f$. L'involution est donnée par $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.
- L'algèbre $C_{c,e}(G)$ des fonctions continues à support compact de G dans C telles que, pour $i \in [\![1, d]\!]$ fixé, $e_i * f * e_i = f$. L'involution est donnée par $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

Commutativité d'algèbres

L'algèbre $D_{K,\tau}(G) := {}^{D_K(G)}/_{\ker(\mu)}$

En considérant les assertions suivantes :

(*i*) (G, K, τ) est un triplet de Gelfand

(*ii*) $D(E_\tau)$ est commutative

(*iii*) $D_{K,\tau}(G)$ est commutative

Alors (*i*) implique (*ii*) et (*ii*) est équivalent à (*iii*). De plus si G/K est connexe, toutes ces assertions sont équivalentes.